

МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В.Г. Сербо

Январь 2006 г.

Физика изучает наиболее общие (фундаментальные) законы природы и является, таким образом, главной наукой о природе. О связи физики с другими науками и с техникой, о масштабах времен и расстояний в природе — см.: Фейнмановские лекции по физике, вып. 1.

Механика изучает законы движения тел. Мы будем рассматривать *классическую*, то есть некантовую механику — такой раздел механики, в котором при движении тел произведение характерных масс m , расстояний r и скоростей v велико по сравнению с квантовой постоянной Планка $\hbar \approx 10^{-34}$ Дж·с, то есть величина $mrv \gg \hbar$. При этом мы будем различать *нерелятивистскую* механику (при $v \ll c$) и *релятивистскую* (при $v \sim c$) механику, где $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме.

I. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

§1. Координаты, скорость, ускорение

В механике принимается (как того требует опыт), что пространство однородно и изотропно. В таком пространстве движение, как и покой, всегда относительно. Тела отсчёта (и связанные с ними часы), по отношению к которым рассматривается движение, называются *системой отсчёта*. Предполагается, что в данной системе отсчёта произведена синхронизация часов.

Материальная точка или частица — тело, размерами которого можно пренебречь в данных условиях движения. Положение материальной точки в данной системе отсчёта полностью задается радиусом-вектором \mathbf{r} в данный момент времени t . С течением времени конец вектора $\mathbf{r}(t)$ движется по кривой, которая называется *траекторией* частицы.

Декартовы координаты x , y , z :

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z; \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz;$$

полярные координаты r , φ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\varphi r d\varphi;$$

цилиндрические координаты ρ , φ , z :

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho \rho + \mathbf{e}_z z; \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\varphi \rho d\varphi + \mathbf{e}_z dz;$$

сферические координаты r, θ, φ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{e}_r r, \quad d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\varphi r \sin \theta d\varphi.$$

Скорость $\mathbf{v}(t)$ характеризует быстроту изменения радиус-вектора и определяется как производная радиус-вектора по времени:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}.$$

Компоненты скорости и квадрат скорости $\mathbf{v}^2 = (d\mathbf{r}/dt)^2$ в различных координатах таковы

декартовы координаты:

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z}; \quad \mathbf{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2;$$

полярные координаты:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}; \quad \mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2;$$

цилиндрические координаты:

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}; \quad \mathbf{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2;$$

сферические координаты:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta; \quad \mathbf{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta.$$

Подобно тому как быстрота изменения радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ характеризуется его производной по времени $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$, так и быстрота изменения скорости со временем может быть характеризована производной скорости по времени. Эта величина называется *ускорением*

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t).$$

Если ускорение постоянно $\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} = \mathbf{const}$, то

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a} dt = \mathbf{v}(0) + \mathbf{a} t,$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t) dt = \mathbf{r}(0) + \mathbf{v}(0) t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2.$$

При свободном падении вблизи поверхности Земли ускорение $\mathbf{a}(t) \approx \mathbf{const} = \mathbf{g}$, где $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$.

Конец вектора $\mathbf{v}(t)$ движется по кривой, которая называется *годографом скорости*. Вектор скорости параллелен касательной к траектории частицы. Аналогично, направление вектора ускорения совпадает с направлением касательной к годографу скорости. В то же время вектор ускорения может иметь произвольное направление по отношению к траектории частицы. Например, при движении тела, брошенного под углом к горизонту, конец радиус-вектора движется по параболе, а конец вектора скорости — по вертикальной прямой (рис. 1).

Рассмотрим более подробно вопрос о составляющих вектора скорости и вектора ускорения .

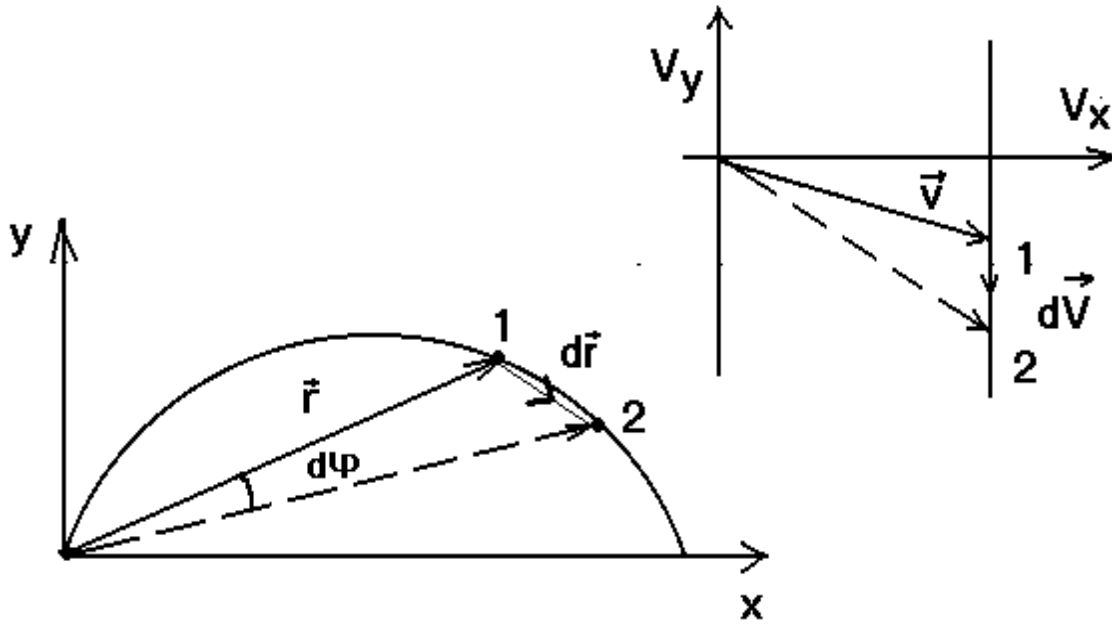


Рис. 1: Траектория и годограф скорости тела, брошенного под углом к горизонту.

§2. Движение по окружности. Нормальная и тангенциальная составляющие ускорения. Общий случай движения по криволинейной траектории

Рассмотрим частицу, движущуюся по окружности радиуса R (рис. 2). Центр полярной системы координат поместим в центре окружности, тогда $x = R \cos \varphi(t)$, $y = R \sin \varphi(t)$, $|\mathbf{r}(t)| = R$. Радиус-вектор

$$\mathbf{r} = R(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

и скорость

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = R\dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

взаимно ортогональны $\mathbf{r}\mathbf{v} = xv_x + yv_y = 0$.

Величина вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R |\dot{\varphi}|$$

зависит от угловой скорости частицы $\dot{\varphi}(t)$.

Составляющие вектора скорости. Представим радиус-вектор \mathbf{r} в виде

$$\mathbf{r}(t) = R\mathbf{e}_r(t),$$

где $\mathbf{e}_r(t)$ — единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{r} . Тогда скорость точки, движущейся по окружности, определится производной по времени от вектора $\mathbf{e}_r(t)$, которая ортогональна вектору \mathbf{r} ,

$$\mathbf{v} = R\dot{\mathbf{e}}_r, \quad \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

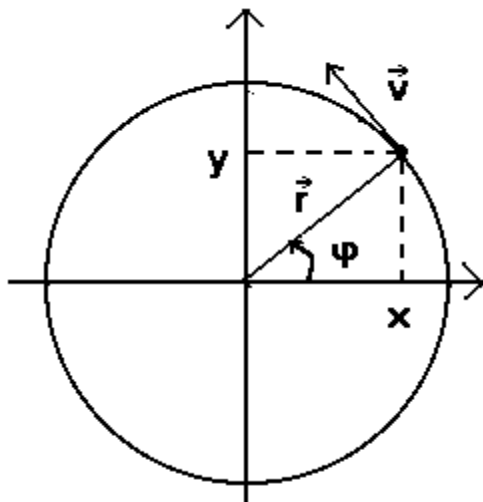


Рис. 2: Движение частицы по окружности радиуса R .

В общем случае радиус-вектор

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(t)$$

может изменяться как по направлению (за счёт изменения вектора $\mathbf{e}_r(t)$), так и по величине (за счёт изменения функции $r(t)$). Поэтому вектор скорости

$$\mathbf{v} = \dot{r}(t) \mathbf{e}_r + r(t) \dot{\mathbf{e}}_r$$

удобно разложить на две составляющие: вдоль радиус-вектора и в поперечном к нему направлении:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{v}_t = \dot{r}(t) \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{v}_n = r(t) \dot{\mathbf{e}}_r, \quad \mathbf{v}_t \parallel \pm \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_n \perp \mathbf{r}.$$

При таком разложении оказывается, что продольная составляющая \mathbf{v}_t “заведует” изменением длины радиус-вектора, а поперечная составляющая \mathbf{v}_n “заведует” поворотом радиус-вектора. Пусть за время dt частица переместится на

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt,$$

тогда изменение длины радиус-вектора за время dt , равное

$$\dot{r}(t) dt = v_t dt,$$

зависит от продольной составляющей скорости. С другой стороны, за это время радиус-вектор повернётся на малый угол

$$d\varphi = \frac{v_n dt}{r},$$

так что угловая скорость вращения радиус-вектора

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_n}{r}$$

зависит от поперечной составляющей скорости.

Составляющие вектора ускорения. Вернёмся к движению частицы по окружности. В этом случае ускорение

$$\mathbf{a} = (\dot{v}_x, \dot{v}_y) = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) - R\dot{\varphi}^2(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

можно представить в виде суммы двух векторов $\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$. Первый из них

$$\mathbf{a}_t = R\ddot{\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \mathbf{v}, \quad a_t = R\ddot{\varphi} = \frac{dv}{dt}$$

направлен вдоль вектора \mathbf{v} при $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi} > 0$ или против вектора \mathbf{v} при $\ddot{\varphi}/\dot{\varphi} < 0$ и называется *тангенциальным* ускорением. Второй

$$\mathbf{a}_n = -R\dot{\varphi}^2(\cos \varphi, \sin \varphi) = -\dot{\varphi}^2 \mathbf{r}, \quad a_n = R\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{R}$$

направлен противоположно радиусу-вектору, то есть к оси вращения и потому ортогонален вектору скорости, $\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{v} = 0$. Его называют *нормальным или центростремительным* ускорением. Можно сказать, что поворот вектора скорости определяется вектором \mathbf{a}_n , в то время как изменением величины вектора скорости зависит от \mathbf{a}_t . При $\mathbf{a}_t = 0$ угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ отсутствует, $\ddot{\varphi} = 0$, и вектор \mathbf{v} вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}$, оставаясь неизменным по величине $v = R |\dot{\varphi}| = \text{const}$.

В общем случае разложим вектор ускорения \mathbf{a} на составляющую \mathbf{a}_t вдоль вектора скорости \mathbf{v} и составляющую \mathbf{a}_n в поперечном к вектору скорости направлении

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{a}_t \parallel \pm \mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_n \perp \mathbf{v}.$$

Повторяя предыдущие выкладки для вектора скорости, получим, что тангенциальное ускорение \mathbf{a}_t “заведует” изменением величины вектора скорости \mathbf{v}

$$dv = a_t dt, \quad a_t = \mathbf{a} \frac{\mathbf{v}}{v},$$

а нормальное или центростремительное ускорение \mathbf{a}_n “заведует” поворотом вектора \mathbf{v} на малый угол

$$\frac{a_n dt}{v}.$$

Радиус кривизны траектории. В общем случае можно провести окружность через три близких точки траектории $\mathbf{r}(t - \Delta t)$, $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. При малых Δt движение частицы по гладкой траектории не будет отличаться от движения по указанной окружности. Радиус построенной при $\Delta t \rightarrow 0$ окружности $R_{\text{кр}}(t)$ называется *радиусом кривизны траектории* в рассматриваемой точке $\mathbf{r}(t)$. Его можно найти по формуле

$$R_{\text{кр}} = \frac{v^2}{a_n}, \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}\mathbf{v})}{v^2} \mathbf{v}.$$

§3. Инерциальные системы отсчёта. Принцип относительности

Среди всевозможных систем отсчёта особое значение имеют инерциальные системы отсчёта, определяемые следующим образом. Сначала введём понятие свободного тела. *Свободным* называется тело, настолько удаленное от других тел, что их влиянием на движение данного тела можно пренебречь. Система отсчета, связанная с набором покоящихся друг относительно друга свободных тел, называется *инерциальной*. В этой системе предполагается произведённой синхронизация часов.

Инерциальные системы являются выделенными из всех возможных систем отсчета. Галилеем был осознан следующий фундаментальный факт: два любых опыта, поставленных одинаковым образом в двух разных инерциальных системах отсчета, дают один и тот же результат. Это утверждение составляет содержание *принципа относительности* (Галилей, Пуанкаре, Эйнштейн): **все инерциальные системы равноправны в том смысле, что законы физики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета.** Это означает, что все законы физики должны быть *ковариантны* относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой инерциальной системе отсчета.

Обобщением опытных фактов является **закон инерции Галилея**: свободное тело в любой инерциальной системе отсчёта движется равномерно и прямолинейно. **Постулат о существовании инерциальных систем отсчёта иногда называют первым законом Ньютона.**

Утверждение о том, что законы механики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта S к другой инерциальной системе отсчёта S' , содержит по существу следующий ряд утверждений.

1. Законы механики не изменяются при сдвиге системы отсчёта на произвольный вектор (a, b, c) , то есть при преобразованиях вида

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c, \quad t' = t.$$

Это утверждение является следствием предположения об однородности пространства, то есть об отсутствии каких-либо выделенных в пространстве точек.

2. Законы механики не изменяются при повороте системы отсчёта относительно произвольной оси, например, при повороте вокруг оси z на угол φ :

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \quad y = y' \cos \varphi + x' \sin \varphi, \quad z = z', \quad t' = t.$$

Это утверждение является следствием предположения об изотропии пространства, то есть об отсутствии каких-либо выделенных в нём направлений.

3. Законы механики не изменяются при сдвиге по оси времени, то есть при преобразованиях вида

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' + \tau.$$

Это следствие предположения об однородности времени, то есть об отсутствии чем-либо выделенных моментов времени.

4. Законы механики не изменяются при преобразованиях, соответствующих равномерному поступательному (без вращения) движению системы отсчёта S' относительно инерциальной системы отсчёта S с некоторой постоянной скоростью $\mathbf{V} =$

const. Сделав соответствующий сдвиг и поворот в пространстве и сдвиг по оси времени, мы можем привести эти две инерциальные системы к стандартной схеме, при которой в этих двух системах в начальный момент времени $t = t' = 0$ начала отсчёта и направления осей совпадают и оси OX и $O'X'$ параллельны постоянному вектору скорости \mathbf{V} (рис. 3). Вид законов преобразования координат и времени существенно различается в нерелятивистской механике (преобразования Галилея) и в релятивистской механике (преобразования Лоренца), что связано с различием в основных положениях (постулатах).

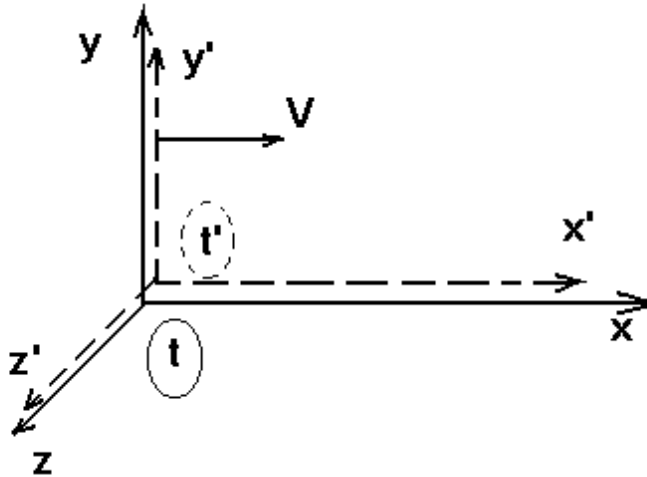


Рис. 3: Инерциальные системы отсчёта S и S' .

§4. Преобразования Галилея

В нерелятивистской механике предполагается справедливыми следующие обобщения опытных данных (при скоростях $v \ll c$):

1. *Справедлив принцип относительности.*
2. *Ход часов не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта, то есть*

$$t = t'.$$

3. *Продольные размеры тел не изменяются.* В формализованном виде это утверждение выглядит следующим образом. Определим сначала понятие размера тела. Для неподвижного (в S' -системе) тела расстояние между двумя его точками $l'_{12} = |\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2|$ может быть измерено простым сравнением этого расстояния с эталоном, причём координаты концов \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 могут быть измерены в один и тот же или разные моменты времени (ведь тело покоится в S' -системе). Для движущегося (в S -системе) тела естественно определить его размер через расстояние l_{12} между теми же двумя его точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , взятыми в один и тот же (в S -системе) момент времени t , то

есть $l_{12} = | \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) |$. Таким образом, если две точки с координатами x'_1 и x'_2 неподвижны в системе S' , то в системе S , в которой эти точки движутся, расстояние

$$x_1(t) - x_2(t) = x'_1 - x'_2.$$

Первые следствия из этих постулатов:

1. События, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, автоматически оказываются одновременными и в любых других инерциальных системах отсчета (ведь $t = t'$!), так что в *нерелятивистской механике одновременность является абсолютным понятием*.

2. *Поперечные размеры движущегося тела не изменяются*, что прямо следует из принципа относительности и изотропии пространства (рассмотрите пример относительного движения двух одинаковых колец в системе покоя одного или другого кольца). Поэтому не изменяются и поперечные координаты:

$$y = y', \quad z = z'.$$

3. *Продольные координаты изменяются на величину пройденного системой S' пути*:

$$x = x' + Vt.$$

Отсюда с учётом закона преобразования времени $t = t'$, получаем

$$x = x' + Vt'.$$

Таким образом, *преобразования Галилея* имеют вид:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad \text{или} \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t', \quad t = t'. \quad (4.1a)$$

Обратные преобразования Галилея получаются отсюда заменами

$$\mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{r}', \quad t \leftrightarrow t', \quad \mathbf{V} \rightarrow -\mathbf{V} \quad (4.2)$$

и имеет вид

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \quad \text{или} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t, \quad t' = t. \quad (4.1b)$$

Определив скорости соотношениями $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ в S -системе и $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$ в S' -системе, получим из (4.1) *нерелятивистский закон преобразования скоростей*:

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \quad (4.3)$$

Аналогично для ускорений $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ в S -системе и $\mathbf{a}' = d\mathbf{v}'/dt'$ в S' -системе из (4.1), (4.3) получаем

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}', \quad (4.4)$$

то есть в **нерелятивистском механике ускорение частицы одинаково в любой инерциальной системе отсчета**.

Напомним также, что размеры тела (величина l_{12}) и время t являются инвариантами преобразований Галилея.

§5. Постулаты Эйнштейна. Относительность одновременности. Неизменность поперечных размеров движущегося предмета. Замедление хода движущихся часов. Сокращение продольных размеров движущегося предмета

Существует множество экспериментальных данных, которые показывают, что в релятивистской области преобразования Галилея неверны. Например, одна и та же движущаяся и находящаяся в покое нестабильная частица имеет разное время жизни; скорость света, испущенного по и против движения Земли, оказывается одной и той же; ни на одном ускорителе не удалось разогнать частицы до скоростей, превышающих скорость света в вакууме c , и т.д. Ковариантность уравнений Ньютона относительно преобразований Галилея, а уравнений Максвелла — относительно преобразований Лоренца.

Совокупность этих фактов можно объяснить, если принять следующие постулаты (А. Эйнштейн, 1905 г.):

1. Принцип относительности справедлив не только для механических (как это было у Галилея), но и для любых других (в частности, электромагнитных) физических явлений.

2. Существует предельная скорость движения частиц и распространения взаимодействий; естественно, она должна быть одной и той же в различных инерциальных системах отсчета; эта предельная скорость совпадает со скоростью света в пустоте c .

Первые следствия из этих постулатов:

1. Относительность одновременности. Если в нерелятивистской механике события, одновременные в одной инерциальной системе отсчета, автоматически оказывались одновременными и в любых других инерциальных системах отсчета, то теперь *одновременность становится относительным понятием*. Пример — два световых сигнала, пришедших из середины релятивистского поезда к его концам. В системе S' (поезд) эти события одновременны, а в системе S (перрон) свет сперва достигает хвостового, а потом головного вагона.

2. Поперечные размеры движущегося тела не изменяются. Это утверждение основано на принципе относительности и изотропии пространства и потому справедливо и в релятивистской механике. Отсюда (как и раньше) следует закон преобразования поперечных координат:

$$y = y', \quad z = z'.$$

3. Замедление хода движущихся часов. Рассмотрим распространение светового сигнала между двумя неподвижными в S' -системе зеркалами, расположенными ортогонально оси $O'Y'$ (рис. 3). Пусть в S' -системе распространение этого сигнала из точки A в точку B и обратно вдоль оси $O'Y'$ происходит за время $\Delta t'$, то есть $y'_B - y'_A = \frac{1}{2}c\Delta t'$ (рис. 3). В системе S этот же сигнал проходит путь из точки A_1 в

точку B и обратно в точку A_2 (рис. 4) за время Δt , причём

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = (y_B - y_A)^2 + \left(\frac{1}{2}V\Delta t\right)^2 = \left(\frac{1}{2}c\Delta t'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}V\Delta t\right)^2,$$

отсюда следует, что

$$\Delta t' = \sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot \Delta t, \quad (5.1)$$

то есть $\Delta t' < \Delta t$ — движущиеся часы идут медленнее покоящихся в

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}$$

раз.

Рис.3

Рис. 4

Подчеркнем, что в S' -системе события, о которых идет речь, происходят в одной и той же точке A , а в системе S — в разных точках A_1 и A_2 .

Рис. 5

4. Сокращение продольных размеров движущегося предмета. Рассмотрим тот же опыт, но с зеркалами, расположенными ортогонально оси OX' (рис. 5). В S' -системе $c\Delta t' = 2l'$, где $l' = x'_B - x'_A$ — длина стержня, на концах которого установлены неподвижные в этой системе зеркала. В S -системе

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2,$$

где

$$c\Delta t_{1,2} = l \pm V\Delta t_{1,2}.$$

Здесь l — длина движущегося стержня с зеркалами. Отсюда

$$\Delta t = \frac{l}{c - V} + \frac{l}{c + V} = \frac{2l}{c [1 - (V/c)^2]}$$

и с учетом (5.1) получим

$$l = \sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot l', \quad (5.2)$$

то есть $l < l'$ — *продольные размеры движущегося тела сокращаются* в γ раз.

Подчеркнем, что $l' = x'_B - x'_A$, где координаты концов стержня x'_A и x'_B могут быть измерены в один и тот же или разные моменты времени (ведь стержень покоится в S' -системе), а $l = x_B - x_A$, где координаты концов движущегося стержня x_A и x_B непременно должны быть измерены в один и тот же (в системе S) момент времени.

§6. Преобразования Лоренца. Релятивистские преобразования скорости

Пусть некоторому событию в S' -системе соответствуют координаты x' , y' , z' и время t' , а в системе S — координаты x , y , z и время t . Поперечные размеры и координаты не изменяются: $y' = y$, $z' = z$.

Рис. 6

Продольная координата x складывается из расстояния Vt до начала отсчета O' системы S' и сокращенной длины движущегося отрезка $O'x'$ (рис. 6) :

$$x = Vt + \sqrt{1 - (V/c)^2} \cdot x',$$

откуда получаем

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (6.1)$$

Обратное преобразование получается отсюда заменами $x \leftrightarrow x'$, $t \rightarrow t'$, $V \rightarrow -V$ (см. (4.2)) и имеет вид:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Подставив это выражение в (6.1), получим

$$t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Обратное преобразование :

$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

В итоге получаем прямые и обратные преобразования Лоренца :

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right);$$

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \quad (6.2)$$

Отсюда находим

$$dx = \gamma(dx' + V dt'), \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)$$

и закон преобразования компонент скорости в S -системе $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ через компоненты скорости в S' -системе $\mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt'$:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_y/\gamma}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_z/\gamma}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (6.3)$$

Обратное преобразование получается заменой $\mathbf{v} \leftrightarrow \mathbf{v}'$, $V \rightarrow -V$. Рассмотрите предельные случаи $V \ll c$ и случай $\mathbf{v}' = (c, 0, 0)$.

Легко убедиться, что в отличие от (4.4) ускорение релятивистской частицы различно в разных инерциальных системах отсчета.

§7. Интервал и собственное время. 4-векторы

Интервалом s_{12} между двумя событиями (t_1, \mathbf{r}_1) и $t_2, \mathbf{r}_2)$ называется величина

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}. \quad (7.1)$$

Покажите, что эта величина инвариантна относительно поворотов осей координат и преобразований Лоренца. *Времениподобные* ($s_{12}^2 > 0$), *пространственноподобные* ($s_{12}^2 < 0$) и *светоподобные* ($s_{12}^2 = 0$) интервалы.

Пусть двумя событиями, о которых шла речь, являются положение материальной точки в два близких момента времени (t, \mathbf{r}) и $(t + dt, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$. Соответствующий интервал $ds = \sqrt{(cdt)^2 - (d\mathbf{r})^2}$. Назовем *собственным временем* τ величину, элемент которой $d\tau$ определяется соотношением

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - (d\mathbf{r}/cdt)^2} \cdot dt = \sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}} \cdot dt. \quad (7.2)$$

Ясно, что $d\tau$ совпадает с обычным временем dt в системе отсчета, в которой частица покоится (при $\mathbf{v} = 0$). С другой стороны, собственное время $d\tau$ удобно тем, что является инвариантом преобразований Лоренца.

В дальнейшем удобно от переменной t перейти к переменной $x_0 = ct$, тогда преобразования Лоренца примут вид

$$x_0 = \gamma\left(x'_0 + \frac{V}{c}x'\right), \quad x = \gamma\left(x' + \frac{V}{c}x'_0\right), \quad y = y', \quad z = z'. \quad (7.3)$$

Четырехмерное множество пространственных координат и моментов времени называется *четырёхмерным пространством-временем*. Точка в этом пространстве задается *4-радиус-вектором*

$$x_\mu = (x_0, x, y, z) = (x_0, \mathbf{r}),$$

а “расстояние” между двумя точками — интервалом s_{12} . Кроме 4-радиус-вектора в дальнейшем окажется удобно рассматривать и другие 4-векторы. Набор величин

$$A_\mu = (A_0, A_x, A_y, A_z) = (A_0, \mathbf{A})$$

называется *4-вектором*, если при вращениях и преобразованиях Лоренца величины A_μ преобразуются так же как и компоненты x_μ , то есть при преобразованиях Лоренца

$$A_0 = \gamma \left(A'_0 + \frac{V}{c} A'_x \right), \quad A_x = \gamma \left(A'_x + \frac{V}{c} A'_0 \right), \quad A_y = A'_y, \quad A_z = A'_z. \quad (7.4)$$

Квадрат “длины” 4-вектора строится аналогично интервалу

$$A_\mu^2 = A_0^2 - \mathbf{A}^2$$

и является инвариантом преобразований Лоренца. Аналогично, величина

$$A_\mu B_\mu = A_0 B_0 - \mathbf{A} \mathbf{B}$$

может быть названа скалярным произведением 4-векторов A_μ и B_μ , эта величина также является инвариантом преобразований Лоренца.

Приведем пример. Так как x_μ и dx_μ являются 4-векторами, а $d\tau$ — инвариант преобразований Лоренца, то отношение

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}$$

является 4-вектором. Величину u_μ называют *4-скоростью*, с учетом (7.2) компоненты u_μ имеют вид

$$u_\mu = (u_0, \mathbf{u}), \quad u_0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (7.5)$$

а квадрат этого 4-вектора равен

$$u_\mu^2 = u_0^2 - \mathbf{u}^2 = c^2. \quad (7.6)$$

Понятие о большом взрыве (Гамов, 1946 г), реликтовом излучении (Пензиас и Уилсон, 1965 г.) и связанной с ним системе отсчета.

III. НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§8. Законы динамики Ньютона

Всюду ниже рассматривается движение тел в инерциальной системе отсчета. В такой системе свободная частица движется с постоянной скоростью: $\mathbf{v} = \mathbf{const}$. А если $\mathbf{v} \neq \mathbf{const}$, то частица не является свободной, она испытывает воздействие других тел. *Степень воздействия других тел на данное называется силой*. Мы обсудим

два возможных способа определения этого понятия, первый (в этом разделе) — более простой и потому удобный для начального изложения, второй — более абстрактный, но и более глубокий, будет рассмотрен в §10.

Степень воздействия различных тел на данное можно определить, сравнивая её со степенью воздействия некоторой эталонной силы. В качестве такого эталона силы можно выбрать, например, маленькую пружинку, растянутую на определенную длину. Степень воздействия такой пружинкой назовем эталоном F_0 . Указав еще и направление воздействия, получим вектор эталонной силы \mathbf{F}_0 . Если на тело в одном и том же направлении действует n таких пружинок, то такое воздействие отвечает силе $n\mathbf{F}_0$. Имея набор всевозможных пружинок и выбирая их таким образом, чтобы при действии их в одном направлении результат совпадал с действием эталонной пружинки, получаем возможность определения дробных частей от \mathbf{F}_0 . В итоге мы получим возможность измерять произвольную силу через эталонную. Таково определение силы в рамках первого способа её определения.

Сравнивая воздействие различных по величине и направлению сил \mathbf{F} на одну и ту же частицу, найдем, что эти силы приводят к движению частицы с разными ускорениями \mathbf{a} , причем

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{a}. \quad (8.1)$$

Утверждение о том, что **ускорение, с которым движется частица, пропорционально действующей на неё силе, составляет содержание второго закона Ньютона**. Отсюда следует, что отношение

$$\frac{|\mathbf{F}|}{|\mathbf{a}|}$$

не зависит ни от силы, ни от ускорения или скорости частицы, и потому является характерной для данной частицы константой, называемой **массой**. Естественно, что значение этой константы должно быть одним и тем же в различных инерциальных системах отсчёта. При таком определении масса выступает как мера **инерции**, то есть мера способности тела противиться попыткам изменить его состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Обозначив эту константу через m , можем вместо (1) записать

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\ddot{\mathbf{r}}. \quad (8.2)$$

То обстоятельство, что сила оказалась пропорциональна именно второй производной по времени от \mathbf{r} , есть экспериментальный факт. С логической точки зрения могли бы быть и другие соотношения между силой и кинематическими характеристиками движения, например,

$$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + c_1\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3},$$

где c_1 — некоторая константа. Такую гипотетическую "причинную или несимметричную механику" пытался развивать (правда, без успеха) известный астроном Козырев.

Понятие об алгоритме решения уравнений движения на ЭВМ.

Обобщением экспериментальных данных является и **третий закон Ньютона: при взаимодействии двух частиц i и k имеет место равенство сил действия и противодействия**

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}. \quad (8.3)$$

Кроме того, справедлив также **закон независимости действия сил: сила \mathbf{F}_{ik} , с которой частица k действует на частицу i , не зависит от присутствия других частиц.** В нерелятивистской механике эта сила зависит только от расстояния $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ между частицами.

Таким образом, для системы из N частиц, которые взаимодействуют только друг с другом (такую систему частиц называют *замкнутой*), справедливы уравнения движения:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k); \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (8.4)$$

Эти уравнения ковариантны относительно преобразований Галилея. Действительно, при переходе в другую инерциальную систему отсчета ускорения и расстояния между частицами не изменяются

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}'_i, \quad \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k = (\mathbf{r}'_i + \mathbf{V}t) - (\mathbf{r}'_k + \mathbf{V}t) = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k,$$

поэтому из (8.4) следуют уравнения

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}'_i = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}(\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_k),$$

то есть в новой системе отсчета уравнения движения в новых переменных имеют точно тот же вид, что и старые уравнения движения в старых переменных.

Область применимости обсуждаемых здесь законов динамики охватывает всю нерелятивистскую классическую механику. При переходе в релятивистскую область приходится учитывать наличие полей и запаздывание взаимодействия. С другой стороны, в квантовой механике возможны обменные взаимодействия, не сводящиеся к простым парным силам между частицами.

§9. Импульс. Закон сохранения импульса у замкнутой системы тел. Центр масс. Задача двух тел

Полная сила \mathbf{F} действующая на замкнутую систему частиц, равна (с учетом (8.3)) нулю:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i,k; i \neq k} (\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki}) = 0.$$

Это же соотношение можно переписать в виде (см. (8.4))

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \sum_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{v}_i \right) = 0,$$

откуда следует, что

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{const}. \quad (9.1)$$

Величину

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$$

называют *импульсом* i -й частицы, соотношение

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \text{const}$$

есть **закон сохранения полного импульса замкнутой системы частиц.**

Если система частиц не является замкнутой и на неё действует внешняя сила

$$\mathbf{F}_{\text{внеш}} = \sum_i \mathbf{F}_{i\text{внеш}} ,$$

то

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} , \quad (9.2a)$$

то есть **скорость изменения полного импульса системы частиц равна сумме внешних сил, действующих на эти частицы.**

Определим радиус-вектор \mathbf{R} *центра масс* (иначе *центра инерции*) системы

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}, \quad M = \sum_i m_i, \quad (9.3)$$

тогда скорость движения центра масс

$$\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad \mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i.$$

Если система частиц замкнута, то ее полный импульс \mathbf{P} , следовательно, и скорость центра инерции \mathbf{V} сохраняются. Если система частиц не является замкнутой, то скорость движения центра масс изменяется согласно (9.2a)

$$M\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}_{\text{внеш}} . \quad (9.2b)$$

Соотношения (9.2)–(9.3) позволяют рассматривать поступательное движение системы частиц как движение одной частицы с массой $M = \sum_i m_i$ (*закон аддитивности масс*) и скоростью \mathbf{V} .

Рассмотрим замкнутую систему тел, состоящую из двух взаимодействующих частиц (так называемая задача двух тел). Их уравнения движения

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$$

можно существенно упростить, если ввести вместо переменных \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 новые переменные — координаты центра инерции \mathbf{R} и относительное расстояние $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.4)$$

Таким образом, задача сведется к равномерному и прямолинейному движению центра инерции системы $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{V}t$ и к движению одной частицы с *приведенной массой* m под действием силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

§10. Сила как мера скорости изменения импульса

Помимо того подхода к законам динамики, который изложен в §8 и §9, определенные преимущества может представлять альтернативный подход, основывающийся на законе сохранения импульса. Именно, первичным считается следующее обобщение опытных данных: каждой частице можно приписать определенную константу m_i , называемую массой, так что для замкнутой системы частиц

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{const}.$$

Величину m_i можно определить, исследуя взаимодействие i -й частицы с некоторой частицей, масса которой m_0 принята за эталонную:

$$m_i \mathbf{v}_i + m_0 \mathbf{v} = m_i \mathbf{v}'_i + m_0 \mathbf{v}' \Rightarrow m_i = m_0 \frac{|\mathbf{v}' - \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}_i|}.$$

В этом подходе сила \mathbf{F}_i , действующая на i -ую частицу, *определяется* как производная по времени от импульса частицы:

$$\mathbf{F}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mathbf{p}_i}{dt}. \quad (10.1)$$

Содержательным утверждением про так определенную силу является следующее обобщение опытных данных: функция \mathbf{F}_i зависит лишь от координат (и, быть может, скоростей) взаимодействующих частиц, то есть

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots). \quad (10.2)$$

Несмотря на кажущуюся простоту, это утверждение является достаточно сильным. Именно оно позволяет рассматривать (10.2) как уравнение движения. Соотношения (10.1)—(10.2) эквивалентны второму закону Ньютона. Из них следует, что для нахождения движения системы частиц достаточно знать силы $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и начальное состояние системы частиц, то есть начальные значения координат и скоростей частиц.

Рассмотрим замкнутую систему из двух взаимодействующих частиц. Для нее из сохранения импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{const}$ следует

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{F}_{12} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{F}_{21},$$

то есть третий закон Ньютона.

§11. Работа. Кинетическая энергия. Связь работы силы с изменением кинетической энергии

Рассмотрим частицу, перемещающуюся из т. 1 в т. 2 вдоль некоторого пути l , элемент которого — вектор $d\mathbf{l}$ (рис. 7).



Рис. 7: Путь из точки 1 в точку 2.

Работой силы \mathbf{F} на пути l из т. 1 в т. 2 назовем величину

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_1^2 F_l dl. \quad (11.1)$$

Назовем *кинетической энергией* частицы величину $K = \frac{1}{2}mv^2$. Так как

$$\mathbf{F} d\mathbf{l} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{l} = m d\mathbf{v} \frac{d\mathbf{l}}{dt} = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = d \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) = dK,$$

то интегрируя это соотношение, получим

$$A_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l} = \int_1^2 dK = K_2 - K_1, \quad (11.2)$$

то есть **изменение кинетической энергии частицы равно работе действующей на частицу силы:**

$$A_{12} = \frac{m\mathbf{v}_2^2}{2} - \frac{m\mathbf{v}_1^2}{2}. \quad (11.3)$$

Это соотношение весьма полезно, так как связывает локальные характеристики частицы (скорости в конце и начале траектории) с интегральной характеристикой (работой силы на данном пути).

§12. Потенциальные силы. Потенциальная энергия

Если во всем пространстве задана скалярная функция $f(\mathbf{r})$ или векторная функция $\mathbf{f}(\mathbf{r})$, то говорят о *скалярном или векторном поле*. Примеры — скалярное поле температур газа $T(\mathbf{r})$, векторное поле скоростей жидкости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ и т.д. В данном случае поле — чисто математическое понятие.

Пусть задано поле силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Если работа этой силы по *любому замкнутому* пути равна нулю, то такая сила называется *потенциальной (или консервативной)*. Для полей таких сил работа

$$\int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l}$$

не зависит от вида пути (докажите!), а зависит лишь от координат т. 1 и т. 2. Поэтому для них можно ввести понятие *потенциальной энергии* т. 2 по сравнению с потенциальной энергией т. 1, определив

$$U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = - \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) d\mathbf{l}. \quad (12.1)$$

Отсюда

$$dU = -\mathbf{F}d\mathbf{l}, \quad F_l = -\frac{\partial U}{\partial l}, \quad \mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}; \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \quad (12.2)$$

Из определения вытекает, что $U(\mathbf{r})$ и $U(\mathbf{r}) + \text{const}$ соответствуют одному и тому же полю сил, поэтому эти две потенциальные энергии физически эквивалентны.

Пример 1. Поле одномерной силы $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (f(x), 0, 0)$. Для любого замкнутого контура l имеем (рис. 8)

$$\mathbf{F}d\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}d\mathbf{l}_2 = f(x)dx - f(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{F}d\mathbf{l} = 0,$$

то есть данное поле сил является потенциальным.

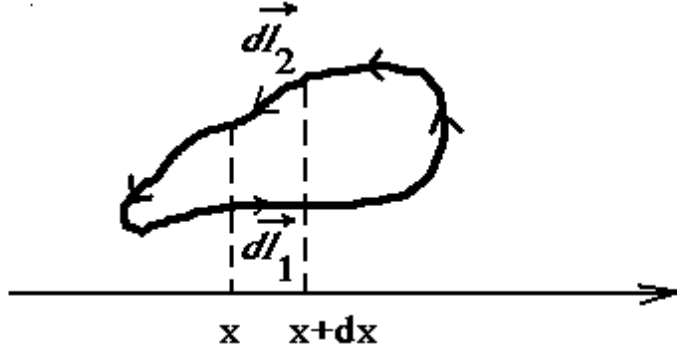


Рис. 8: Работа одномерной силы вдоль замкнутого пути.

Таковыми являются, например, поле тяжести вблизи поверхности Земли, где

$$f(x) = -mg, \quad U(x) - U(a) = mg(x - a),$$

и поле сил одномерного линейного осциллятора, у которого

$$f(x) = -kx, \quad U(x) - U(a) = \frac{1}{2}k(x^2 - a^2).$$

Обычно выбирают $a = 0$ и $U(a) = 0$.

Пример 2. Центральное поле сил

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Так как $\mathbf{F} d\mathbf{l} = f(r) dr$, то для любого замкнутого контура имеем (рис. 9)

$$\mathbf{F}d\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}d\mathbf{l}_2 = f(r)dr - f(r)dr = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \mathbf{F}d\mathbf{l} = 0,$$

то есть центральное поле является потенциальным.

Кулоновское поле

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3}; \quad U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{a}) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{a};$$

обычно выбирают $a = \infty$ и $U(\mathbf{a}) = 0$.

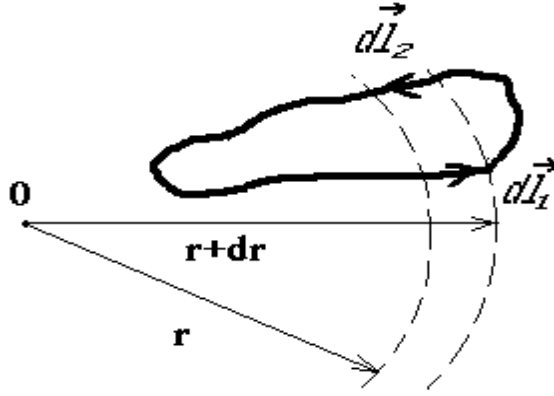


Рис. 9: Работа центральной силы вдоль замкнутого пути.

Изотропный гармонический осциллятор

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -k\mathbf{r}; \quad U(\mathbf{r}) - U(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} k \mathbf{r}^2 - \frac{1}{2} k \mathbf{a}^2;$$

обычно выбирают $a = 0$ и $U(\mathbf{a}) = 0$.

Пример 3. Сила трения обычно направлена противоположно скорости, поэтому

$$\oint \mathbf{F} d\mathbf{l} = \oint \mathbf{F} \mathbf{v} dt < 0,$$

то есть силы трения не являются потенциальными.

§13. Закон сохранения энергии

Рассмотрим замкнутую систему из N частиц, взаимодействующих друг с другом через потенциальные силы

$$\mathbf{F}_{ik} = -\frac{\partial U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Энергия этой системы

$$E = K + U, \quad K = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2, \quad U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i,k;i < k} U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \quad (13.1)$$

сохраняется, так как с учетом (8.4)

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \left(\frac{dK}{d\mathbf{v}_i} \dot{\mathbf{v}}_i + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \sum_i \mathbf{v}_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i) = 0.$$

Рассмотрим теперь некоторую подсистему из s частиц, которая входит в обсуждаемую систему, то есть $s < N$. Потенциальная энергия этой подсистемы U_s зависит уже не только от взаимных расстояний между частицами этой подсистемы $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, $i \leq s$, $k \leq s$, но и от взаимных расстояний между частицами подсистемы и

остальными частицами замкнутой системы: $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$, $i \leq s$, $k > s$. Рассмотрим случай, когда остальные частицы играют роль внешних условий, в которых происходит движение рассматриваемой подсистемы, то есть когда величины \mathbf{r}_k при $k > s$ являются известными заданными функциями времени $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(t)$, $k = s + 1, \dots, N$. Тогда потенциальная энергия U_s представляет собой функцию координат частиц подсистемы и времени

$$U_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_s, t) = \sum_{i < k; i, k=1}^s U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) + \sum_{i=1}^s \sum_{k=s+1}^N U_{ik}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k(t)).$$

При движении частиц подсистемы ее энергия $E_s = K_s + U_s$, $K_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s m_i \mathbf{v}_i^2$, вообще говоря, не сохраняется, так как в этом случае

$$\frac{dE_s}{dt} = \sum_{i=1}^s \mathbf{v}_i (m_i \dot{\mathbf{v}}_i - \mathbf{F}_i) + \frac{\partial U_s}{\partial t} = \frac{\partial U_s}{\partial t}. \quad (13.2)$$

И только в том случае, если $\partial U_s / \partial t = 0$, то есть если внешние условия стационарны, энергия E_s сохраняется.

§14. Распады и соударения в нерелятивистской механике

При переходе от одной инерциальной системы отсчёта S к другой инерциальной системе отсчёта S' потенциальная энергия, зависящая от взаимных расстояний, не изменяется, а кинетическая энергия изменяется:

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}'_i + \mathbf{V})^2 = K' + \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 + \mathbf{P}' \mathbf{V}; \quad \mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i; \quad M = \sum_i m_i.$$

Если S' система есть система центра инерции, то $\mathbf{P}' = 0$ и

$$K = K_{\text{ц}} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{\text{ц}}^2, \quad E = E_{\text{ц}} + \frac{1}{2} M \mathbf{V}_{\text{ц}}^2. \quad (14.1)$$

Согласно этому уравнению сложное тело, состоящее из взаимодействующих материальных точек, имеет наименьшую энергию в системе центра инерции. Эту энергию называют *внутренней энергией* тела

$$E_{\text{вн}} = E_{\text{ц}}.$$

При распаде покоившегося сложного тела на несколько более простых тел справедливы законы сохранения

$$E_{\text{вн}} = \sum_i \left(E_{\text{вн}i} + \frac{1}{2} M_i \mathbf{V}_i^2 \right), \quad \sum_i M_i \mathbf{V}_i = 0, \quad (14.2)$$

так что распад возможен лишь при

$$E_{\text{вн}} > \sum_i E_{\text{вн}i}. \quad (14.3)$$

Такие столкновения, при которых тела после некоторого сближения расходятся без изменения своего внутреннего состояния (а значит и внутренней энергии), называются *упругими столкновениями*. Для них в сци

$$\mathbf{p}_{1ц} = -\mathbf{p}_{2ц}, \quad \mathbf{p}'_{1ц} = -\mathbf{p}'_{2ц}, \quad |\mathbf{p}_{1ц}| = |\mathbf{p}_{2ц}| = |\mathbf{p}'_{1ц}| = |\mathbf{p}'_{2ц}|, \quad (14.4)$$

а в лабораторной системе

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 = \mathbf{p}_{1ц} + m_1 \mathbf{V}; \quad \mathbf{p}'_i = \mathbf{p}'_{iц} + m_i \mathbf{V}; \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}_1}{m_1 + m_2}. \quad (14.5)$$

Рассмотрите подробнее случаи $m_1 = m_2$ и $m_1 \ll m_2$.

При абсолютно неупругом центральном ударе потеря кинетической энергии равна

$$K - K' = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2,$$

где m — приведенная масса. При фиксированной начальной кинетической энергии $K = \frac{1}{2}(m_1 \mathbf{v}_1^2 + m_2 \mathbf{v}_2^2)$ величина $K - K'$ максимальна, когда центр инерции соударяющихся частиц неподвижен (нерелятивистский аналог преимущества встречных пучков).

§15. Закон Кулона. Закон всемирного тяготения. Понятие о фундаментальных силах; гравитационное, электрослабое и сильное взаимодействия

Все изучаемые в классической механике силы сводятся к фундаментальным силам гравитационного и электромагнитного взаимодействия. Так, электромагнитное взаимодействие ответственно за строение атомов и молекул, за упругие силы, силы трения и реакции опор. В ядерной физике в области малых расстояний $\lesssim 10^{-15}$ м существенную роль играют сильное и слабое взаимодействия.

Электромагнитное взаимодействие. Закон Кулона

Важной, первичной характеристикой элементарных частиц является их заряд q или его отсутствие. Различают положительные и отрицательные заряды. Между одинаковыми заряженными частицами возникает отталкивание. Между частицами разных типов могут быть силы либо притяжения, либо отталкивания. Так как электрон и протон (первые открытые элементарные частицы) притягиваются друг к другу, то условно заряду электрона приписывается знак “минус”, а заряду протона знак “плюс”. Абсолютные величины этих зарядов оказались одинаковы:

$$q_p = -q_e = e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл},$$

где e — так называемый *элементарный заряд*. В обычном веществе заряд $q = (Z_p - Z_e)e$, где Z_p и Z_e — число протонов и электронов в данном веществе. Для точечных зарядов величиною q_1 и q_2 при $v_i \ll c$ справедлив **закон Кулона** (1785 г.)

$$\mathbf{F}_{21} = k q_1 q_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (15.1)$$

где $k = 1$ в гауссовой системе единиц и $k \approx 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл² в СИ. Кулоновой силе соответствует потенциальная энергия взаимодействия двух частиц

$$U_{12} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Знак заряда и его величину у других элементарных частиц теперь можно установить, наблюдая их взаимодействие с частицами, заряд которых известен. Удивительной особенностью заряда является то, что у всех заряженных элементарных частиц (а значит и у всех заряженных тел) он оказался по абсолютной величине целым кратным от элементарного заряда e . Величина заряда не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой инерциальной системе отсчёта. Одним из фундаментальных законов природы является **закон сохранения заряда** — у замкнутой системы тел

$$\sum_i q_i = \text{const}.$$

Одна из наиболее точных проверок этого закона — по стабильности электрона. Экспериментально установлено, что время жизни электрона $\tau_e > 4,6 \cdot 10^{26}$ лет.

Если заряженные тела не являются точечными, то силу их взаимодействия можно найти, разбив каждое тело на малые (почти точечные) участки и применяя формулу (16.1) для взаимодействия этих малых участков. Пусть, например, взаимодействуют два протяженных тела с зарядами q и q' . Первое тело разобьём на малые участки с зарядами q_i , радиус-векторы которых \mathbf{r}_i , а второе — на малые участки с зарядами q'_j и радиус-векторами \mathbf{r}'_j . Тогда сила взаимодействия этих тел

$$\mathbf{F}_{21} = \sum_{ij} k q_i q'_j \frac{\mathbf{r}_{ji}}{r_{ji}^3}, \quad \mathbf{r}_{ji} = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}_i. \quad (15.2)$$

Пользуясь этим методом, можно показать, что равномерно заряженные сферы и шары взаимодействуют так, как будто бы их заряды сосредоточены в их центрах. В то же время взаимодействие равномерно заряженных колец или дисков зависит не только от расстояния между их центрами, но и от их взаимной ориентации.

Область применимости закона Кулона простирается от самых больших расстояний до расстояний $\lesssim \hbar/(m_e c) \approx 4 \cdot 10^{-13}$ м, где возникают поправки порядка

$$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (15.3)$$

В релятивистской области сила взаимодействия между зарядами уже не описывается законом Кулона. Становится необходимым учитывать запаздывание взаимодействия и излучение ускоренно движущихся зарядов. Последовательное описание этих явлений даётся квантовой электродинамикой (КЭД), проверяемой, в частности, и в опытах на встречных электрон-позитронных пучках.

Гравитационное взаимодействие. Закон всемирного тяготения

Гравитационное взаимодействие всегда соответствует притяжению частиц. Галилей установил, что **ускорение падающих тел не зависит от их масс m** , поэтому $F_{\text{грав}} \propto m$, отсюда

$$F_{12} \propto m_1 m_2.$$

Из предположения, что

$$F_{\text{грав}} \propto \frac{1}{r^2}$$

Ньютон смог вывести законы Кеплера для движения планет. Таким образом, для точечных масс m_1 и m_2 при $v_i \ll c$ справедлив **закон всемирного тяготения** (И. Ньютон, 1687 г.):

$$\mathbf{F}_{21} = -G m_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (15.4)$$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух частиц равна

$$U_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Ньютон доказал, что однородные сферы и шары взаимодействуют так, как будто бы их массы сосредоточены в их центрах. В 1798 г. Г. Кавендиш, используя установку с крутильными весами, определил значение гравитационной постоянной

$$G \approx 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{М}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$$

В атомных явлениях гравитационные силы не играют никакой роли. Сравним, например, гравитационные и электрические силы в атоме водорода:

$$\frac{F_{\text{грав}}}{F_{\text{элект}}} = \frac{G m_e m_p}{k e^2} \sim 10^{-39}$$

(для электрона $m_e = 0,9 \cdot 10^{-30}$ кг, для протона $m_p \approx 2000 m_e$). Силы тяготения между обычными макроскопическими телами также малы. Так, два небольших тела с массами ~ 1 кг на расстоянии ~ 1 м притягиваются друг к другу с силами $\sim 10^{-10}$ Н. Роль гравитационных сил возрастает при переходе к объектам большего масштаба. Что касается астрономических тел, то силы гравитации играют в их движении определяющую роль. Электростатические силы в таких масштабах, как правило, ничтожны, так как эти тела в целом практически электронейтральны. Вся небесная механика основана на законе всемирного тяготения.

Опыт Кавендиша иногда называют "взвешиванием" Земли, так как он позволил определить массу Земли. Действительно, тело массы m на поверхности Земли притягивается с силой

$$mg = G \frac{m m_3}{R_3^2},$$

где $R_3 \approx 6400$ км — радиус Земли. Отсюда

$$m_3 = \frac{g R_3^2}{G} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Аналогично, зная ускорение Земли в её годичном движении вокруг Солнца $a = \omega^2 R = (2\pi/T)^2 R$, можно определить массу Солнца $m_C = a R^2 / G$ (здесь $T = 1$ год и $R \approx 150$ млн км — период обращения и радиус орбиты Земли).

Первая $v_1 = \sqrt{g R_3} \approx 8$ км/с, вторая $v_2 = \sqrt{2} v_1 \approx 11$ км/с и третья $v_3 = \sqrt{2 G m_C / R_{3C}} \approx 42$ км/с космические скорости. Вес и невесомость. Влияние вращения Земли.

Опыт Этвеша, $m_{\text{гравитационная}} / m_{\text{инертная}} = \text{const} \cdot (1 \pm 10^{-12})$. Принцип эквивалентности, понятие об общей теории относительности.

Электрослабое и сильное взаимодействия

Кулоновская сила в рамках КЭД соответствует взаимодействию квантов электронно-позитронного поля с квантами электромагнитного поля:

В этой картине кулоновское взаимодействие имеет вид

$$U = \frac{kq_e^2}{r} e^{-r/l_\gamma} = \frac{kq_e^2}{r},$$

так как $l_\gamma = \hbar/m_\gamma c = \infty$. Степень интенсивности этого взаимодействия $\sim \alpha$.

Слабое взаимодействие; реакции распада

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$$

и рассеяния

$$\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+, \quad \bar{\nu} + p \rightarrow \mu^+ + \text{hadrons};$$

малые радиус и интенсивность взаимодействия. Понятие о теории Вайнберга-Салама-Глэшоу (1967 г.); обмен W^\pm - и Z^0 -бозонами:

Предсказание $m_W \sim m_Z \sim 100m_p$. Несохранение четности в атомных переходах. Открытие W^\pm - и Z^0 -бозонов на ускорителе SPS со встречными $p\bar{p}$ -пучками в Женеве (Руббиа, ван дер Меер и Дарьюла, 1983 г.).

Сильное (или ядерное) взаимодействие соответствует силам малого радиуса $\lesssim 10^{-15}$ м и большой интенсивности $\alpha_s \sim 100\alpha$. Именно эти силы удерживают p и n в ядре. Понятие о квантовой хромодинамике (КХД) — теории взаимодействия фундаментальных “цветных” частиц (кварков и глюонов).

IV. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

§16. Релятивистские энергия и импульс

Нерелятивистский импульс $m\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ не является компонентой какого-либо 4-вектора, поэтому закон сохранения полного нерелятивистского импульса у замкнутой системы тел не имеет ковариантного вида, то есть может нарушаться при лоренцевых

переходах к другим инерциальным системам отсчета. Естественное релятивистское обобщение импульса состоит в замене скорости \mathbf{v} на 4-скорость u_μ (7.3):

$$m\mathbf{v} \rightarrow p_\mu = (p_0, \mathbf{p}) = mu_\mu = m \frac{dx_\mu}{d\tau}; \quad p_0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}; \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}}. \quad (16.1)$$

Все имеющиеся экспериментальные данные подтверждают, что при релятивистских соударениях и распадах имеет место **закон сохранения полного 4-импульса замкнутой системы частиц: сумма $\sum_i (p_\mu)_i$ по начальным частицам (до соударения) равна сумме $\sum_j (p'_\mu)_j$ по конечным частицам (после соударения)**.

Величину

$$\varepsilon = cp_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

называют *релятивистской энергией свободной частицы*, а предел ε при $v \rightarrow 0$, то есть

$$\varepsilon_0 = mc^2,$$

называют *энергией покоя*. Релятивистские энергия и импульс связаны соотношениями

$$\varepsilon^2 = m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2; \quad \mathbf{p} = \frac{\varepsilon}{c^2} \mathbf{v}. \quad (16.2)$$

Отсюда видно, что в нерелятивистском пределе

$$\varepsilon = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \dots, \quad \text{при } v \ll c,$$

а в ультрарелятивистском пределе

$$\varepsilon = |\mathbf{p}| \cdot c + \frac{m^2 c^3}{2|\mathbf{p}|} + \dots; \quad \text{при } c - v \ll c \text{ или при } \varepsilon \gg mc^2.$$

Релятивистская сила

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma\mathbf{a} + m\gamma^3 \frac{(\mathbf{a}\mathbf{v})\mathbf{v}}{c^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

оказывается зависящей не только от ускорения \mathbf{a} , но и от скорости \mathbf{v} , в частности, $\mathbf{F} = m\gamma^3\mathbf{a}$ при $\mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$ и $\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a}$ при $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$. Соотношения, аналогичные (11.2), имеют вид

$$\mathbf{F}d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}d\mathbf{l} = \mathbf{v}d\mathbf{p} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}}d\mathbf{p} = d(\varepsilon + \text{const}). \quad (16.3)$$

Пусть

$$K = \varepsilon - mc^2$$

— релятивистская кинетическая энергия, в нерелятивистском пределе эта величина совпадает с её нерелятивистским значением: $K = \frac{1}{2}mv^2$ при $v \ll c$. Интегрируя соотношение (16.3) получим соотношение между работой силы и изменением кинетической энергии

$$A_{12} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = K_2 - K_1, \quad (16.4)$$

аналогичное уже установленному в нерелятивистской механике.

Так как величины ε/c и \mathbf{p} — компоненты 4-импульса p_μ , то их закон преобразования уже известен (см. (7.4)):

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \gamma(\varepsilon' + Vp'_x), \quad p_x = \gamma\left(p'_x + \frac{V}{c^2}\varepsilon'\right), \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z; \\ \varepsilon' &= \gamma(\varepsilon - Vp_x), \quad p'_x = \gamma\left(p_x - \frac{V}{c^2}\varepsilon\right), \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z; \\ \gamma &= 1/\sqrt{1 - (V/c)^2}.\end{aligned}\tag{16.5}$$

Квадрат 4-импульса

$$p_\mu^2 = \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2\tag{16.6}$$

есть инвариант преобразований Лоренца.

Необходимость учета полевых степеней свободы при рассмотрении взаимодействия релятивистских частиц.

§17. Фотон. Эффект Доплера

Соотношения (16.2) совместимы в пределе $v \rightarrow c$, $m \rightarrow 0$, при этом

$$\varepsilon = |\mathbf{p}| \cdot c.$$

Такой частицей с $m = 0$ и $v = c$ являются фотон γ . Электромагнитная волна частоты ω — набор фотонов с энергией

$$\varepsilon = \hbar\omega.$$

Если в S' -системе испускается фотон с энергией ε' под углом φ' к оси x' , то есть

$$\mathbf{p}' = \frac{\varepsilon'}{c}(\cos \varphi'; \sin \varphi'; 0),$$

то в S -системе его энергия равна :

$$\varepsilon = \gamma\varepsilon' \cdot \left(1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'\right).$$

Отсюда получаем формулу *эффекта Доплера*

$$\omega = \omega' \cdot \frac{1 + \frac{V}{c} \cos \varphi'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}.$$

Определение по эффекту Доплера скоростей движения компонент двойных звёзд и скоростей разбегания далёких галактик и квазаров (красное смещение).

§18. Распады и соударения в релятивистской механике. Понятие о методе встречных пучков

Определение массы нестабильной частицы по 4-импульсам продуктов распада

$$m^2 c^2 = \left(\sum_j \frac{\varepsilon_j}{c} \right)^2 - \left(\sum_j \mathbf{p}_j \right)^2 ;$$

распады $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$, $Z \rightarrow e^+ + e^-$.

Пороговая энергия на примере реакции $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$:

$$(p_1 + p_2)_\mu^2 = 2\varepsilon_{1л} m + 2m^2 c^2 = (4mc)^2 \Rightarrow$$

$$K_{1л} = \varepsilon_{1л} - mc^2 = 6mc^2 \approx 5,6 \text{ ГэВ.}$$

Упругие соударения на примере *эффекта Комптона* $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$. Закон сохранения 4-импульса $(p_\gamma + p_e)_\mu = (p'_\gamma + p'_e)_\mu$ перепишем в виде

$$(p'_e)_\mu^2 = (p_\gamma + p_e - p'_\gamma)_\mu^2$$

или в виде

$$(p'_\gamma)_\mu (p_\gamma + p_e)_\mu = (p_\gamma)_\mu (p_e)_\mu.$$

В $л$ -системе из этого уравнения получаем

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda_e \sin^2 \frac{\theta_\gamma}{2}, \quad \lambda_e = \frac{2\pi\hbar}{m_e c} \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м}, \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad \lambda' = \frac{2\pi c}{\omega'}.$$

Если же рассматривается лобовое соударение фотона на ультрарелятивистском электроде, то для рассеянного назад фотона получим

$$\varepsilon'_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma (\varepsilon_e + c |\mathbf{p}_e|)}{2\varepsilon_\gamma + \varepsilon_e - c |\mathbf{p}_e|} \approx \frac{x}{x+1} \varepsilon_e, \quad x = \frac{4\varepsilon_\gamma \varepsilon_e}{m_e^2 c^4}.$$

Возможность получения фотонных пучков высокой энергии.

Встречные пучки, семейство ВЭПП'ов. Рассмотрев инвариант $(p_1 + p_2)_\mu^2$ в $л$ - и $ц$ -системах, получим

$$\varepsilon_{л} = \frac{\varepsilon_{ц}^2 + (m_2^2 - m_1^2)c^4}{2m_2 c^2}, \quad \varepsilon_{л} = \varepsilon_{1л} + m_2 c^2, \quad \varepsilon_{ц} = \varepsilon_{1ц} + \varepsilon_{2ц}.$$

Пример реакции $e^+ + e^- \rightarrow Z$. Понятие о встречных линейных e^+e^- пучках .

§19. Энергия связи. Реакции деления и синтеза атомных ядер

Если составное тело массы m может распадаться, то при распаде из состояния покоя

$$\varepsilon_0 = mc^2 = \sum_j \varepsilon_j = \sum_j (m_j c^2 + K_j).$$

Так как $K_j \geq 0$, то распад возможен, если только $\Delta m = \sum_j m_j - m < 0$, в этом случае величина $-\Delta m \cdot c^2 = \sum_j K_j$ есть суммарная кинетическая энергия продуктов распада, то есть *энерговывделение реакции*.

При $\Delta m > 0$ распад невозможен, а величина $\Delta m \cdot c^2$ есть *энергия связи*, равная минимальной работе, которую надо затратить, чтобы “растачить” тело на составные части.

Атом водорода :

$$\Delta m c^2 = (m_p + m_e - m_H) c^2 \approx K_e + U_{ep} = 13,6 \text{ эВ}, \quad \frac{\Delta m}{m} \approx 10^{-8}.$$

Атомные ядра: $\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_A$, где $A = Z + N$; удельная энергия связи на один нуклон $\Delta m c^2 / A$ имеет максимум ≈ 9 МэВ при $A \approx 56$ (железо).

Реакции деления:

$$n + {}^{235}\text{U} \rightarrow A_1 + A_2 + (2 \div 3)n + 200 \text{ МэВ}, \quad \frac{\Delta m}{m} \approx 0,1\%;$$

атомные бомбы и реакторы.

Реакции синтеза:

$${}^2\text{d} + {}^3\text{t} \rightarrow {}^4\text{He} + n + 18 \text{ МэВ}, \quad \frac{\Delta m}{m} \approx 0,4\%;$$

водородная бомба и управляемый термоядерный синтез; мюонный катализ.

V. КОЛЕБАНИЯ

§20. Одномерное движение в потенциальном поле. Период колебаний

Рассмотрим движение частицы массы m вдоль оси OX в потенциальном поле $U(x)$. В математике хорошо известно, что уравнение движения (уравнение Ньютона)

$$m\ddot{x} = F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (20.1)$$

с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ имеет единственное решение $x(t)$. С другой стороны при движении в таком поле сохраняется энергия

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) = \text{const}. \quad (20.2)$$

Энергия представляет собой пример *интеграла движения*, т. е. функции координат и скоростей, которая сохраняется при движении системы. Для одномерного движения наличие такого интеграла движения дает возможность вместо уравнения второго порядка (20.1) использовать уравнение первого порядка (20.2) и найти в квадратурах закон движения $x(t)$.

Действительно, по начальным данным находим константу

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0),$$

после чего в уравнении первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]} \quad (\text{для } \dot{x} \geq 0) \quad (20.3)$$

переменные разделяются и ответ в квадратурах имеет вид

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + t_0. \quad (20.4)$$

Рис. 10: Границы движения в потенциальном поле

Точки x_i , в которых $U(x_i) = E$, определяют границы области движения частицы. В этих точках скорость $v_i = 0$, но ускорение $a_i = -U'(x_i)/m$ может быть отлично от нуля. Рассмотрим пример потенциальной энергии с локальным максимумом U_m (рис. 10). Поскольку кинетическая энергия $K = E - U(x) > 0$, то при энергии $E < U_m$ движение возможно лишь в двух областях: при $x_1 < x < x_2$ и при $x > x_3$. Ускорения $a_{1,2,3} \neq 0$, причем $a_{1,3} > 0$, $a_2 < 0$, поэтому вблизи точек $x_{1,2,3}$ движение оказывается приближенно равноускоренным и эти точки являются точками поворота. В области $x > x_3$ частица уходит на бесконечность, ее движение *инфинитно*. В области $x_1 < x < x_2$ частица совершает колебания (движение *финитное*) с периодом

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (20.5)$$

В общем случае *колебаниями* называются такие движения, которые точно или почти точно повторяются. Колебания встречаются во всех областях физики, примерами являются: колебания маятника; колебания давления воздуха — звук; колебания электрического и магнитного поля — радио, свет; колебания атомов в молекулах; колебания протонов и нейтронов в ядре и т. д. Помимо периода колебаний, полезно ввести также частоту колебаний ν — число колебаний в единицу времени, которая связана с периодом колебаний соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (20.6)$$

Единицей измерения частоты является *герц*, 1 Гц соответствует одному колебанию в секунду.

§21. ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Пусть потенциальная энергия $U(x)$ имеет локальный минимум в некоторой точке x_{\min} . Эта точка является точкой устойчивого равновесия, т. к. при малых отклонениях от точки x_{\min} возникают силы, стремящиеся вернуть частицу в положение равновесия. Сместим начало отсчета координат в точку x_{\min} и разложим потенциальную энергию в ряд по малым отклонениям x от начала координат:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \frac{1}{3!}U'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}U^{(4)}(0)x^4 + \dots$$

Константа $U(0)$ несущественна и ее можно опустить, первая производная обращается в нуль в точке минимума $U'(0) = 0$. Если вторая производная обращается в нуль $U''(0) = 0$, то непременно и третья производная $U'''(0) = 0$, и тогда разложение $U(x)$ начинается с членов пропорциональных x^4 . Соответственно сила $F_x \propto x^3$ и колебания становятся *нелинейными*. Но если $U''(0) \neq 0$, то непременно $U''(0) > 0$, обозначим

$$U''(0) = k > 0.$$

Итак, для малых отклонений x от положения равновесия потенциальная энергия в достаточно общих предположениях есть

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \dots,$$

а полная энергия

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Действующая сила

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx + \dots$$

является *линейной* функцией смещения. Коэффициент k называется *жесткостью*. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} > 0 \quad (21.1a)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (21.1b)$$

Систему, подчиняющуюся такому уравнению, называют *линейным осциллятором*.

Решение уравнения (21.1) легко найти из следующих соображений. Ранее в §2 мы видели, что при движении частицы по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью ω ускорение частицы $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega\mathbf{r}$. Проекция этого уравнения на ось OX совпадает с уравнением (21.1a), поэтому

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (21.2)$$

где константы a и φ определяются начальными условиями. Стандартная терминология: a — амплитуда колебаний, $\omega t + \varphi$ — фаза, а φ — начальная фаза колебаний, ω — (круговая) частота колебаний, связанная с периодом T и (циклической) частотой ν соотношениями:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Учтем начальные условия:

$$x(0) = x_0 = a \cos \varphi, \quad \dot{x}(0) = v_0 = -a\omega \sin \varphi,$$

что приводит к окончательному ответу:

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (21.3)$$

Связь начальных условий с амплитудой и начальной фазой колебаний дается соотношениями:

$$a = \sqrt{x_0^2 + (x_0/\omega)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_0}{\omega x_0}.$$

Потенциальная $U = kx^2/2$ и кинетическая $K = m\dot{x}^2/2$ энергии линейного осциллятора колеблются с течением времени

$$U = \frac{1}{4}m\omega^2 a^2 [1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)], \quad K = \frac{1}{4}m\omega^2 a^2 [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi)], \quad (21.4)$$

а полная энергия сохраняется

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \quad (21.5)$$

Легко обобщить полученные результаты на случай, когда потенциальная энергия зависит от какой-либо обобщенной координаты q , не обязательно имеющей размерность длины, $U = U(q)$, а кинетическая энергия зависит от q и \dot{q} и имеет вид

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}f(q) \dot{q}^2.$$

Пусть q_0 есть точка, в которой потенциальная энергия имеет локальный минимум. Введем отклонение от положения равновесия $x = q - q_0$ и разложим потенциальную энергию в ряд по степеням x . Тогда в достаточно общих предположениях

$$U(q) = \frac{1}{2}k_{\text{эф}}x^2 + \dots,$$

где эффективная жесткость

$$k_{\text{эф}} = \frac{d^2U(q_0)}{dq^2}.$$

Разлагая далее $f(q)$ в ряд по степеням x и учитывая, что $\dot{q} = \dot{x}$, получим

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m_{\text{эф}}\dot{x}^2 + \dots,$$

где эффективная масса

$$m_{\text{эф}} = f(q_0).$$

В итоге, для малых колебаний полная энергия имеет вид

$$E = \frac{1}{2}m_{\text{эф}}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k_{\text{эф}}x^2,$$

который отличается от найденного выше лишь заменой $m \rightarrow m_{\text{эф}}$ и $k \rightarrow k_{\text{эф}}$. Полная энергия не зависит от времени, поэтому дифференцирую это уравнение по t , найдем уравнение движения, аналогичное (16.1),

$$m_{\text{эф}} \ddot{x} = -k_{\text{эф}} x \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega^2 = \frac{k_{\text{эф}}}{m_{\text{эф}}} > 0 \quad (21.6)$$

Его решение имеет вид (21.2).

Пример: малые колебания математического маятника. Пусть частица массы m колеблется в вертикальной плоскости на невесомом стержне длины l в поле тяжести с ускорением g . В качестве обобщенной координаты удобно выбрать угол φ , отсчитываемый от положения равновесия, тогда

$$K = \frac{1}{2} m (l\dot{\varphi})^2, \quad U = mgl(1 - \cos \varphi).$$

В этом случае

$$m_{\text{эф}} = ml^2, \quad k_{\text{эф}} = mgl, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Приведем также другой способ решения уравнения (21.1), который легко обобщается на более сложные случаи. Рассмотрим *линейное однородное дифференциальное уравнений с постоянными коэффициентами*:

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \quad (21.7)$$

Для линейных уравнений справедлив *принцип суперпозиции*: если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются решениями уравнения, то их линейная комбинация

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) \quad (21.8)$$

с произвольными коэффициентами $C_{1,2}$ также является решением данного уравнения. Для нахождения решения уравнения (21.7) в математике используется следующий стандартный прием: ищем решение этого уравнения в виде

$$x(t) = \text{Re} \{e^{rt}\}, \quad (21.9a)$$

который удобен тем, что производные от этого выражения отличаются от исходного только постоянным множителем

$$\frac{dx}{dt} = \text{Re} \{r e^{rt}\}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n} = \text{Re} \{r^n e^{rt}\}. \quad (21.9b)$$

Подставляя (21.9) в уравнение (21.7), найдем, что (21.9a) удовлетворяет дифференциальному уравнению (21.7), если выполняется *характеристическое* алгебраическое уравнение для параметра r :

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0. \quad (21.10)$$

Пусть r_1, r_2, \dots, r_n — корни этого уравнения. Тогда общее решение уравнения (16.7) имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{j=n} \text{Re} \{C_j e^{r_j t}\}, \quad (21.11)$$

Для линейного осциллятора характеристическое уравнение таково: $r^2 + \omega^2 = 0$, его корни $r_{1,2} = \pm i\omega$, поэтому

$$x(t) = \operatorname{Re} \{C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\} = a \cos(\omega t + \varphi).$$

Если правая часть линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами отлична от нуля и равна некоторой функции $F(t)$,

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = F(t), \quad (21.12)$$

то такое уравнение называется *неоднородным*. Его решение представляет собой сумму двух слагаемых — описанного выше общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x(t) = x_{\text{однор.}}(t) + x_{\text{частное реш.}}(t) \quad (21.13)$$

§22. Затухающие колебания

Рассмотрим влияние трения на свободные колебания одномерного гармонического осциллятора, описываемого координатой x . Из опыта известно, что сила направлена в сторону, противоположную скорости движения \dot{x} и, при малом абсолютном значении скорости, пропорциональна ей. Это позволяет записать силу трения в виде

$$f_{\text{тр}} = -\alpha \dot{x},$$

где α — положительная константа, характеризующая интенсивность трения. Уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -\alpha \dot{x} - kx. \quad (22.1)$$

Разделим его на m и введем обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m}. \quad (22.2)$$

Здесь ω_0 — частота свободных колебаний в отсутствие трения, а величина λ называется *коэффициентом затухания*. Уравнение свободных колебаний запишется в виде:

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (22.3)$$

Полагая $x = \operatorname{Re} e^{rt}$, получаем для r квадратное характеристическое уравнение, решения которого есть

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (22.4)$$

Общее решение есть линейная суперпозиция двух решений:

$$x(t) = \operatorname{Re} \{C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\}.$$

При сильном трении ($\lambda \geq \omega_0$) оба характеристических показателя отрицательны и общее решение x , убывая без колебаний, стремится к нулю. Такое движение называется *апериодическим затуханием*.

При более слабом трении ($\lambda < \omega_0$) характеристические показатели комплексно сопряжены

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (22.5)$$

и решение имеет вид:

$$x = ae^{-\lambda t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \varphi\right), \quad (22.6)$$

где a и φ — вещественные постоянные. Такое движение представляет собой *затухающие колебания*.

В важном предельном случае $\lambda \ll \omega_0$ величина $ae^{-\lambda t}$ почти не изменяется за время одного колебания, поэтому ее условно можно назвать амплитудой колебания. Средние за период одного колебания квадраты координаты и скорости можно вычислять считая множитель $e^{-\lambda t}$ постоянным. Эти средние квадраты пропорциональны $e^{-2\lambda t}$ и энергия колебаний убывает по этому же закону:

$$E(t) = E_0 e^{-2\lambda t}.$$

Рассмотрим простой пример движения осциллятора с трением, которому в начальный момент времени сообщили отличную от нуля скорость, т. е. $x = 0$ при $t \leq 0$, $v_0 \neq 0$. В этом случае (рис. ???) при $t > 0$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\lambda t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t\right). \quad (22.7)$$

Характерное время затухания колебаний есть $\tau = 1/\lambda$, его часто называют *временем жизни* осциллятора.

§23. Вынужденные колебания, резонанс

Рассмотрим движение осциллятора с трением под действием внешней гармонической силы $f \cos(\omega t + \varphi)$. Уравнение движения запишется в виде (ср. (17.3)):

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos(\omega t + \varphi). \quad (23.1)$$

Решение этого неоднородного линейного уравнения представляют собой сумму двух слагаемых (16.13) — описанного выше свободного движения и вынужденного (установившегося) колебания. Вынужденное колебание естественно искать в виде гармонического колебания той же частоты ω , что у внешней силы, но с возможным сдвигом фазы δ :

$$x(t) = b \cos(\omega t + \varphi + \delta). \quad (23.2)$$

При этом удобно искать решение в комплексной форме. Для этого запишем

$$\cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}\{e^{i(\omega t + \varphi)}\}.$$

Отыскивая решение в виде

$$x(t) = \operatorname{Re}\{Be^{i(\omega t + \varphi)}\},$$

найдем комплексную амплитуду

$$B = be^{i\delta} = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega)}.$$

Мнимая часть B всегда отрицательна, а действительная при возрастании ω от нуля до бесконечности меняет знак с положительного на отрицательный при $\omega = \omega_0$; значит аргумент меняется в интервале $0 > \delta > -\pi$. Для вещественной амплитуды b и аргумента δ имеем

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}, \quad \text{ctg } \delta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\lambda\omega}. \quad (23.3)$$

Графики функций b и δ в зависимости от частоты вынуждающей силы ω представлены на рис. ????. Видно, что при малом трении амплитуда b резко возрастает при определенной частоте внешней силы — наступает *резонанс*.

Рис. ????: Зависимость амплитуды вынужденных колебаний b и фазы δ от частоты вынуждающей силы ω для различных значений коэффициента затухания λ .

Легко найти, что при заданной амплитуде силы f амплитуда вынужденных колебаний b максимальна на частоте $\omega = \sqrt{\gamma_0^2 - 2\lambda^2}$. Рассмотрим окрестность резонанса в практически наиболее интересном случае слабого трения $\lambda \ll \omega_0$. Обозначая $\epsilon = \omega - \omega_0$ и заменяя приближенно

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0) \approx 2\omega_0\epsilon, \quad 2i\lambda\omega \approx 2i\lambda\omega_0,$$

получим

$$b \approx \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\epsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \text{ctg } \delta \approx \frac{\epsilon}{\lambda}, \quad \epsilon = \omega - \omega_0.$$

Максимальная амплитуда вынужденных колебаний обратно пропорциональна λ :

$$b_{\max} = \frac{f}{2m\omega_0\lambda}.$$

Квадрат амплитуды колебаний, пропорциональный энергии колебаний, меньше в два раза по сравнению с максимальным значением при $\epsilon = \pm\lambda$. Изменение фазы δ также происходит, в основном, в этом же интервале частот. Таким образом, характерная ширина области резонанса равна λ .

Учитывая, что свободные колебания в осцилляторе с трением затухают, видим, что со временем остаются только вынужденные колебания вида (23.2). Т. к. фаза δ отрицательна, аргумент косинуса этого решения имеет значение, которое аргумент косинуса вынуждающей силы имел в более ранний момент времени; говорят, что *вынужденное колебание отстает по фазе от вынуждающей силы*.

VI. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ

§24. Момент силы. Момент импульса и его связь с секториальной скоростью. Закон сохранения момента импульса для движения частицы в центральном поле и у замкнутой системы тел

Векторное произведение векторов

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \equiv [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{c}, \quad c = ab \sin \alpha, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b}, \quad c_x = a_y b_z - a_z b_y, \dots,$$

где α — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Момент силы

$$\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Момент импульса

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Для отдельной частицы изменение момента импульса определяется моментом силы

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{K}.$$

Если действующая на частицу сила является центральной, то $\mathbf{K} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$, то есть **при движении частицы под действием центральной силы момент импульса частицы сохраняется.**

Закону сохранения момента импульса можно придать наглядный геометрический смысл, используя понятие **секториальной скорости**. Пусть за время dt частица сместится из точки \mathbf{r} на расстояние $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$. Так как модуль векторного произведения $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times d\mathbf{r}$ равен площади параллелограмма со сторонами \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, то длина вектора

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}, d\mathbf{r}]$$

равна площади, “заметенной” радиус-вектором частицы за время dt . Определим секториальную скорость соотношением

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{[\mathbf{r}, d\mathbf{r}]}{dt} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}, \mathbf{v}],$$

направление вектора секториальной скорости задает плоскость орбиты, а длина — площадь, заметаемую радиус-вектором частицы в единицу времени. Секториальная скорость связана с моментом импульса соотношением

$$\mathbf{M} = 2m \frac{d\mathbf{S}}{dt},$$

поэтому сохранение момента импульса означает, что *секториальная скорость в центральном поле является постоянной величиной.*

У замкнутой системы частиц полный момент импульса сохраняется. Действительно,

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i,$$

и в этой сумме обязательно встретятся пары слагаемых вида

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ik} = 0,$$

так как в механике (см. §8)

$$\mathbf{F}_{ik} \parallel \pm (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k).$$

Если система частиц не является замкнутой, то

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K}_{\text{внеш}}.$$

§25. Движение в центральном поле

Законы сохранения. Для изучения движения частицы удобно воспользоваться законами сохранения энергии E и момента импульса \mathbf{M} :

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(r) = \text{const}, \quad (25.1)$$

$$\mathbf{M} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}. \quad (25.2)$$

Из уравнения (25.2) следует, что орбита находится в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{M} , пусть это будет xy -плоскость. Вводя полярные координаты r и φ в этой плоскости (см. §1), получаем

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2 + U(r), \quad (25.3)$$

$$\mathbf{M} = (0, 0, M), \quad M = mr^2\dot{\varphi}. \quad (25.4)$$

Радиальное движение. Используя (25.4), исключим $\dot{\varphi}$ из (25.3)

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{эф}}(r); \quad U_{\text{эф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (25.5)$$

Таким образом, радиальное движение сведено к одномерному движению в эффективном поле $U_{\text{эф}}(r)$ с дополнительным слагаемым $M^2/(2mr^2)$.

Траектории движения. Рассмотрим более детально траекторию частицы. Вид траектории можно найти из (25.4) и (25.5). Действительно, из (25.5) получаем

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эф}}(r)]} \quad \text{для } \dot{r} \gtrless 0, \quad (25.6)$$

или

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} \rightarrow t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} + t_0. \quad (25.7)$$

Используя (25.4) в форме

$$dt = \frac{mr^2}{M} d\varphi, \quad (25.8)$$

исключим dt из (25.7) и найдём уравнение траектории:

$$\varphi = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эф}}(r)}} + \varphi_0. \quad (25.10)$$

§26. Задача Кеплера

Рассмотрим движение частицы в кулоновском поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r},$$

где $\alpha = G m_C m_3$ для движения Земли в гравитационном поле Солнца или $\alpha = ke^2$ для движения электрона в электрическом поле протона (атом водорода). В этом случае

$$U_{\text{эф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2},$$

и мы можем увидеть из рис. 9 следующее:

Рис. 9

если $E_1 \geq 0$, то частица, приходящая из бесконечности, будет отражена потенциальным барьером $U_{\text{эф}}(r)$ в точке r_1 и снова уйдёт на бесконечность (инфинитное движение):

$$r_1 \leq r \leq \infty \quad \text{при} \quad E_1 \geq 0;$$

если $E_2 < 0$, то частица испытывает радиальные колебания в области (финитное движение)

$$r_{\min} \leq r \leq r_{\max} \quad \text{при} \quad E_2 < 0.$$

Уравнение траектории имеет вид:

$$\varphi = \pm \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const.}$$

Если ввести так называемый *параметр* орбиты

$$p = \frac{M^2}{m\alpha}$$

и новую безразмерную переменную

$$u = \frac{p}{r},$$

то получим

$$\varphi = \mp \int \frac{du}{\sqrt{e^2 - (u-1)^2}} + \text{const.},$$

где величина

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

называется *эксцентриситетом* орбиты.

Интегрирование выполняется элементарно

$$\varphi = \pm \arccos \frac{u - 1}{e} + \text{const}$$

или

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \text{const})}.$$

Мы видим, что $r = r_{\min}$ при $\varphi = \text{const}$. Выбирая $\text{const} = 0$, имеем $r = r_{\min}$ при $\varphi = 0$ (для движения планеты эта точка называется *перигелием*). В результате получаем уравнение траектории в виде

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Это известные кривые, соответствующие коническим сечениям:

гипербола для $e > 1$ (при $E > 0$),

парабола для $e = 1$ (при $E = 0$),

эллипс для $e < 1$ (при $E < 0$),

окружность для $e = 0$ (при $E = -m\alpha^2/(2M^2)$).

Отметим, наконец, что параметр p равен значению радиуса при $\varphi = \pi/2$:

$$p = \frac{M^2}{m\alpha} = r \left(\varphi = \frac{\pi}{2} \right).$$

Рис. 10

Эллиптическая орбита. Законы Кеплера. Рассмотрим более подробно важный случай $E < 0$. В этом случае орбита — эллипс с главной полуосью $a = (1/2) AB$ и малой полуосью b (см. рис. 10), а параметр $p = OC$. Тот факт, что планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых расположено Солнце, составляет содержание *первого закона Кеплера*.

Поскольку рассматриваемое поле является центральным, для него справедлив закон сохранения секториальной скорости, который можно сформулировать в таком

виде — за равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметает одинаковые площади (*второй закон Кеплера*).

Нетрудно показать, что главная полуось зависит только от энергии (но не от момента импульса):

$$a = \frac{1}{2}(OA + OB) = \frac{1}{2}(r_{\min} + r_{\max}) = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2} = \frac{\alpha}{2|E|}.$$

По определению эксцентриситета малая полуось b связана с большой полуосью a соотношением

$$b = \sqrt{1-e^2} a,$$

из которого следует, что b зависит не только от энергии, но и от момента импульса:

$$b = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}.$$

Наконец, выпишем полезные соотношения:

$$r_{\min} = (1-e)a, \quad r_{\max} = (1+e)a, \quad p = (1-e^2)a.$$

Период обращения можно найти, используя постоянство секториальной скорости. Полная площадь, заметённая радиус-вектором планеты за время одного оборота T , равна

$$S = \frac{dS}{dt} \cdot T = \frac{M}{2m} \cdot T = \pi ab \rightarrow T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}},$$

откуда следует *третий закон Кеплера*:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} = \frac{4\pi^2}{Gm_C},$$

то есть для всех планет отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси эллипса оказывается одинаковым.

В этом разделе под *твердым телом* мы будем подразумевать совокупность материальных точек, расстояния между которыми не изменяются в процессе движения. Это означает, что мы пренебрегаем всеми видами деформации твердого тела, во многих случаях такое пренебрежение вполне разумно. Отметим также, что такое приближение возможно лишь в нерелятивистской механике (“абсолютно твердое тело” противоречит теории относительности, потому, например, что с его помощью можно было бы передавать сигналы с произвольной скоростью).

§27. Поступательное и вращательное движение твердого тела

Положение твердого тела в некоторой инерциальной системе координат XYZ можно задать следующим образом. Пусть к этому телу “прибита” система координат $x_1x_2x_3$ с началом в точке O (рис. ???). Тогда шесть величин — три координаты радиус-вектора \mathbf{R} точки O в инерциальной системе XYZ и три угла, которые задают ориентацию осей $x_1x_2x_3$ относительно осей XYZ , — полностью определяют положение твердого тела.

Пусть твердое тело состоит из N материальных точек. Для любой такой материальной точки $a = 1, 2, \dots, N$ с массой m_a и радиус-вектором \mathbf{r}_a в системе координат $x_1x_2x_3$ ее радиус-вектор в инерциальной системе есть

$$\mathbf{R} + \mathbf{r}_a.$$

Подчеркнем важный для дальнейшего факт, что проекции x_a, y_a, z_a вектора \mathbf{r}_a на оси $x_1x_2x_3$ системы координат не изменяются при движении твердого тела, хотя сам вектор \mathbf{r}_a может изменять свое направление (но не длину!).

Произвольное движение твердого тела можно представить как совокупность двух простых движений — поступательного и вращательного. При *поступательном* движении изменяется вектор \mathbf{R} , а вектор \mathbf{r}_a не изменяет своего направления, так что любая линия, соединяющая две произвольные материальные точки данного твердого тела остается параллельной самой себе при таком движении. В этом случае скорость \mathbf{v}_a любой материальной точки твердого тела совпадает со скоростью движения точки O , то есть

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{V}. \quad (27.1)$$

При *вращательном* движении, напротив, положение точки O не изменяется, а твердое тело вращается с угловой скоростью Ω вокруг направления, задаваемого единичным вектором \mathbf{n} . Удобно ввести вектор угловой скорости

$$\mathbf{\Omega} = \Omega \cdot \mathbf{n}.$$

Конечно, этот вектор зависит от времени $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}(t)$, поскольку как величина угловой скорости, так и направление вращения могут изменяться с течением времени. При вращательном движении твердого тела составляющие его материальные точки

вращаются с угловой скоростью Ω в плоскостях, перпендикулярных направлению \mathbf{n} , поэтому скорость a -ой материальной точки равна (ср. §2)

$$\mathbf{v}_a = \Omega \times \mathbf{r}_a. \quad (27.2)$$

В случае, когда твердое тело движется произвольно, скорость a -ой материальной точки равна

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{r}_a. \quad (27.7)$$

Начало системы координат $x_1x_2x_3$, т. е. точка O , может быть выбрана совершенно произвольно, в том числе и вне самого твердого тела. Покажем, однако, что *угловая скорость Ω не зависит от выбора точки O* . Пусть начало отсчета смещено в точку O' , отстоящую на расстояние \mathbf{B} от точки O , так что новый радиус-вектор \mathbf{r}'_a связан со старым радиус-вектором \mathbf{r}_a соотношением

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{B}. \quad (27.8)$$

При этом скорость точки O' в согласии с (7) равна

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{B}. \quad (27.9)$$

Для скорости \mathbf{v}_a материальной точки мы можем использовать два эквивалентных выражения — или формулу (3) в старых координатах или формулу

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{V}' + \Omega' \times \mathbf{r}'_a \quad (27.10)$$

в новых координатах. Подставив (27.8) в формулу (27.7), получим соотношение

$$\mathbf{V}' + \Omega' \times \mathbf{r}'_a = \mathbf{V} + \Omega \times \mathbf{B} + \Omega \times \mathbf{r}'_a,$$

из которого в силу (9) и произвольности вектора \mathbf{r}'_a следует равенство:

$$\Omega' = \Omega,$$

т. е. независимость угловой скорости вращения твердого тела от выбора точки O .

Разложим скорость \mathbf{V} на составляющие \mathbf{V}_{\parallel} и \mathbf{V}_{\perp} , параллельные и перпендикулярные вектору угловой скорости $\Omega(t)$ в данный момент времени. Сделаем то же самое и для скорости \mathbf{V}' , тогда из равенства (9) получим два соотношения

$$\mathbf{V}'_{\parallel} = \mathbf{V}_{\parallel}, \quad \mathbf{V}'_{\perp} = \mathbf{V}_{\perp} + \Omega \times \mathbf{B}.$$

Если $\mathbf{V}_{\parallel} = 0$, то из этих формул следует, что можно найти такую точку O' , чтобы скорость \mathbf{V}' в данный момент времени была равна нулю. Иными словами, в этом случае существует возможность представить движение твердого тела как чистое вращение. Соответствующую ось вращения, проходящую через точку O' , при этом называют *мгновенной осью вращения тела*.

§28. Импульс и кинетическая энергия твердого тела. Момент инерции

Импульс твердого тела равен сумме импульсов материальных точек данного тела:

$$\mathbf{P} = \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a. \quad (28.1a)$$

Подставив (27.7) и введя обозначения массы всего твердого тела и радиус-вектора его центра инерции

$$m = \sum_a m_a, \quad \mathbf{r}_{\text{ци}} = \frac{\sum_a m_a \mathbf{r}_a}{m}, \quad (28.2)$$

найдем

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V} + m[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_{\text{ци}}]. \quad (28.1b)$$

Если начало отсчета “прибитой” системы координат $x_1x_2x_3$ поместить в центр инерции твердого тела, так что $\mathbf{r}_{\text{ци}} = 0$, то *импульс твердого тела окажется равен импульсу материальной точки с массой m и скоростью, равной скорости движения центра инерции $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\text{ци}}$* :

$$\mathbf{P} = m\mathbf{V}_{\text{ци}}. \quad (28.3)$$

Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий материальных точек данного тела, т. е.

$$K = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N m_a \mathbf{v}_a^2.$$

Подставив (27.7) и используя обозначения (28.2), найдем

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2 + m \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{r}_{\text{ци}} \times \mathbf{V}).$$

Если начало отсчета системы координат $x_1x_2x_3$ поместить в центр инерции твердого тела, то *кинетическая энергия твердого тела окажется равной сумме кинетической энергии материальной точки (с массой m и скоростью $\mathbf{V}_{\text{ци}}$) и кинетической энергии вращения твердого тела*:

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_{\text{ци}}^2 + \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2 \quad (28.4)$$

(напомним, что аналогичный результат для произвольной системы материальных точек мы уже получали в §14).

Рассмотрим более подробно случай, когда точка O покоится, так что вся кинетическая энергия твердого тела является энергией вращения

$$K_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2. \quad (28.5)$$

Пусть твердое тело вращается с угловой скоростью Ω вокруг направления, задаваемого единичным вектором \mathbf{n} , в этом случае a -я материальная точка вращается по окружности радиуса

$$\rho_a = r_a \sin \alpha_a, \quad (28.6)$$

где α_a — угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{r}_a , со скоростью

$$v_a = \Omega \rho_a. \quad (28.7)$$

Поэтому кинетическая энергия такого вращения (28.5) равна

$$K = \frac{1}{2} I_{\mathbf{n}} \Omega^2, \quad (28.8)$$

где введено обозначение

$$I_{\mathbf{n}} = \sum_a m_a \rho_a^2 \quad (28.9)$$

для *момента инерции* твердого тела относительно оси \mathbf{n} . В частности, моменты инерции относительно осей “прибитой” системы координат $x_1 x_2 x_3$ равны

$$I_1 = \sum_a m_a (y_a^2 + z_a^2), \quad I_2 = \sum_a m_a (x_a^2 + z_a^2), \quad I_3 = \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2). \quad (28.10)$$

Отсюда следует, что сумма двух разных моментов инерции I_i всегда больше или равна любому моменту инерции, так

$$I_1 + I_2 = \sum_a m_a (x_a + y_a^2 + 2z_a^2) \geq \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2) = I_3.$$

Из этого же соотношения видно, что для плоского твердого тела (расположенного в плоскости $x_1 x_2$) имеет место равенство

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (28.11)$$

Рассмотрим случай, когда начало O системы координат $x_1 x_2 x_3$ помещено в центр инерции твердого тела, а начало другой системы координат $x'_1 x'_2 x'_3$ — точка O' — смещено на некоторое расстояние. Напомним, что вектор угловой скорости и его направление \mathbf{n} не зависят от выбора начала “прибитой” системы координат. При первом выборе кинетическая энергия вращения равна

$$K_{\text{ци}} = \frac{1}{2} I_{\mathbf{n}}^{\text{ци}} \Omega^2,$$

а при втором выборе —

$$K = \frac{1}{2} I'_{\mathbf{n}} \Omega^2.$$

Эту формулу можно также переписать также в виде (28.4):

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{V}_{\text{ци}}^2 + K_{\text{ци}}.$$

Учитывая, что скорость движения центра инерции в $x'_1x'_2x'_3$ системе координат равна $V_{\text{ци}} = B\Omega$, где B — расстояние между осями вращения, проведенными в точках O и O' , получим соотношение (которое иногда называется *теоремой Гюйгенса–Штейнера*)

$$I'_{\mathbf{n}} = I_{\mathbf{n}}^{\text{ци}} + mB^2. \quad (28.12)$$

Из этой формулы видно, что момент инерции имеет наименьшее значение в системе центра инерции твердого тела.

Пример 1. Однородное кольцо массы m и радиуса R . Выберем начало “прибитой” системы координат $x_1x_2x_3$ в центре кольца, само кольцо расположим в плоскости x_1x_2 . При вычислении I_3 учтем, что расстояние ρ_a от любой точки кольца до оси вращения — оси x_3 — равно R , поэтому $I_3 = mR^2$. В силу симметрии моменты инерции I_1 и I_2 совпадают и (с учетом (28.11)) равны $I_1 = I_2 = I_3/2$. Таким образом, для кольца

$$I_1 = I_2 = mR^2/2, \quad I_3 = mR^2.$$

Пример 2. Однородный диск массы m и радиуса R . Такой диск удобно рассматривать как совокупность тонких колец радиуса r и толщиной dr , масса такого кольца

$$dm = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr.$$

Отсюда

$$I_3 = \int r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} mR^2, \quad I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{4} mR^2.$$

Пример 3. Однородная сфера массы m и радиуса R . Выберем начало $x_1x_2x_3$ системы координат в центре кольца, в силу сферической симметрии

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{1}{3}(I_1 + I_2 + I_3) = \frac{2}{3} \sum_a m_a (x_a^2 + y_a^2 + z_a^2) = \frac{2}{3} mR^2.$$

Пример 4. Однородный шар массы m и радиуса R . Такой шар удобно рассматривать как совокупность тонких шаровых слоев, что дает

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} mR^2.$$

§29. Момент импульса твердого тела

Момент импульса твердого тела равна сумме моментов импульса материальных точек данного тела, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{a=1}^N m_a [\mathbf{R} + \mathbf{r}_a, \mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] = \\ &= m[\mathbf{R}, \mathbf{V}] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] + m[\mathbf{r}_{\text{ци}}, \mathbf{V}] + m[\mathbf{R}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_{\text{ци}}]]. \end{aligned} \quad (26.1)$$

Если начало отсчета системы координат $x_1x_2x_3$ поместить в центр инерции твердого тела, то *момент импульса твердого тела окажется равен сумме момента*

импульса материальной точки с массой m , радиусом-вектором \mathbf{R} и скоростью, равной скорости движения центра инерции, и момента импульса, соответствующего вращению твердого тела относительно точки O с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{M} = m[\mathbf{R}, \mathbf{V}_{\text{ци}}] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] . \quad (26.2)$$

Рассмотрим более подробно случай, когда точка O покоится, так что

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_a]] . \quad (26.3)$$

Пусть для определенности ось вращения \mathbf{n} совпадает с осью Z , тогда a -я материальная точка вращается по окружности радиуса ρ_a (28.6) в плоскости, параллельной плоскости XY , со скоростью $v_a = \Omega\rho_a$, лежащей в той же плоскости и перпендикулярной радиусу вращения. В этом случае компонента момента импульса

$$M_Z = \sum_a m_a \rho_a v_a = I_Z \Omega , \quad (26.4)$$

где I_Z — момент инерции твердого тела (28.9) относительно оси Z .

Используя (26.3) легко показать (с учетом (28.5)), что

$$\frac{1}{2} \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \sum_a m_a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_a)^2 = K_{\text{вращ}} . \quad (26.5)$$

§30. Уравнения движения твердого тела

Начнем с уравнения для импульса твердого тела, стартуя от известного закона Ньютона для движения a -ой материальной точки под действием силы \mathbf{f}_a :

$$\frac{d(m_a \mathbf{v}_a)}{dt} = \mathbf{f}_a .$$

Суммируя это уравнение по всем материальным точкам твердого тела, получим

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (27.1)$$

где \mathbf{P} — импульс твердого тела, определенный формулами (28.1)–(28.3), а

$$\mathbf{F} = \sum_a \mathbf{f}_a$$

— полная действующая на тело сила (а так как внутренние силы, действующие между материальными точками твердого тела, взаимно скомпенсированы, то фактически сила \mathbf{F} есть полная внешняя сила, действующая на твердое тело). Если начало отсчета “прибитой” системы координат $x_1 x_2 x_3$ поместить в центр инерции твердого тела (см. (28.3)), то $\mathbf{P} = m \mathbf{V}_{\text{ци}}$.

Совершенно аналогично может быть получено уравнение для момента импульса твердого тела:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K} , \quad (27.2)$$

где \mathbf{M} — момент импульс твердого тела, определенный формулами (26.1)–(26.3), а

$$\mathbf{K} = \sum_a [\mathbf{r}_a, \mathbf{f}_a]$$

— полный действующий на тело момент сил (а так как внутренние моменты сил, взаимно скомпенсированы, то фактически \mathbf{K} есть полный момент внешних сил, действующих на твердое тело). При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, например, оси Z , компонента момента $M_Z = I_Z \Omega$ и уравнение (27.2) принимает вид

$$\frac{d(I_Z \Omega)}{dt} = K_Z. \quad (27.3)$$

§31. Движение симметрического волчка

Твердое тело, обладающее сферической симметрией, будем называть *шаровым волчком*. Твердое тело, обладающее симметрией вращения относительно некоторой оси (*оси симметрии*), будем называть *симметрическим волчком*.

Свободное движение

При свободном движении твердого тела $\mathbf{F} = \mathbf{K} = 0$, и потому импульс и момент импульса твердого тела сохраняются, а центр инерции движется с постоянной скоростью. Выберем инерциальную систему, в которой центр инерции покоится, и поместим начала отсчета инерциальной системы XYZ и “прибитой” системы $x_1 x_2 x_3$ в центр инерции твердого тела.

У шарового волчка моменты инерции $I_1 = I_2 = I_3$, поэтому

$$\mathbf{M} = I \boldsymbol{\Omega}. \quad (31.1)$$

Отсюда видно, что при свободном движении шарового волчка сохраняется не только момент импульса \mathbf{M} , но и сонаправленный с ним вектор угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$.

Законов сохранения импульса и момента импульса достаточно и для определения свободного движения симметрического волчка. Докажем предварительно два простых свойства, присущих движению симметрического волчка.

А. Если угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ параллельна оси симметрии волчка, то момент импульса волчка \mathbf{M} параллелен угловой скорости. Рассмотрим a -ую материальную точку волчка, ее момент импульса равен

$$\mathbf{M}_a = m_a \mathbf{r}_a \times \mathbf{v}_a.$$

У симметрического волчка каждой материальной точке a можно сопоставить симметричную материальную точку \bar{a} , полученную при повороте вокруг оси симметрии на 180° . В рассматриваемом случае для этих двух симметричных точек выполняются следующие соотношения (рис. ????):

$$\mathbf{v}_{\bar{a}} = -\mathbf{v}_a \perp \boldsymbol{\Omega}, \quad (31.2a)$$

а разность $\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{\bar{a}}$ ортогональна оси симметрии, поэтому

$$(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a \parallel \boldsymbol{\Omega}. \quad (31.3a)$$

Используя эти соотношения, для суммы моментов импульса двух симметричных материальных точек получим

$$\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_{\bar{a}} = m_a (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a, \quad (31.4a)$$

что с учетом (31.3a) и доказывает тот факт, что в рассматриваемом случае суммарный момент импульса твердого тела

$$\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\Omega}, \text{ если } \boldsymbol{\Omega} \parallel \text{оси симметрии.} \quad (31.5a)$$

В. Если угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ перпендикулярна оси симметрии волчка, то момент импульса волчка \mathbf{M} параллелен угловой скорости. Учитывая как и выше a -ую и \bar{a} -ую симметричные точки, получим другие соотношения:

$$\mathbf{v}_{\bar{a}} = \mathbf{v}_a \perp \boldsymbol{\Omega}, \quad (31.2b)$$

а сумма $\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_{\bar{a}}$ направлена по оси симметрии, поэтому

$$(\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a \parallel \boldsymbol{\Omega}. \quad (31.3b)$$

Используя эти соотношения, для суммы моментов импульса двух симметричных материальных точек получим

$$\mathbf{M}_a + \mathbf{M}_{\bar{a}} = m_a (\mathbf{r}_a + \mathbf{r}_{\bar{a}}) \times \mathbf{v}_a, \quad (31.4b)$$

что с учетом (31.3b) и доказывает тот факт, что в рассматриваемом случае суммарный момент импульса твердого тела

$$\mathbf{M} \parallel \boldsymbol{\Omega}, \text{ если } \boldsymbol{\Omega} \perp \text{оси симметрии.} \quad (31.5b)$$

Разложим угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}$ на составляющие $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\perp}$, параллельные и перпендикулярные оси симметрии волчка. Сделаем то же самое и для момента импульса волчка \mathbf{M} , тогда из доказанных свойств получим соотношения

$$\mathbf{M}_{\parallel} = I_{\parallel} \boldsymbol{\Omega}_{\parallel}, \quad \mathbf{M}_{\perp} = I_{\perp} \boldsymbol{\Omega}_{\perp},$$

I_{\parallel} и I_{\perp} — соответствующие моменты инерции. В векторной форме эти уравнения можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\Omega}_{\perp} = \frac{\mathbf{M}_{\parallel}}{I_{\parallel}} + \frac{\mathbf{M}_{\perp}}{I_{\perp}}.$$

Если ввести единичный вектор \mathbf{e}_{\parallel} вдоль оси симметрии волчка, то эту формулу можно представить в виде

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{M_{\parallel}}{I_{\parallel}} - \frac{M_{\perp}}{I_{\perp}} \right) \mathbf{e}_{\parallel} + \frac{\mathbf{M}}{I_{\perp}}. \quad (31.6)$$

Эта формула очень удобна для анализа движения волчка. Из нее следует, что три вектора \mathbf{M} , $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{e}_{\parallel} всегда лежат в одной плоскости.

При свободном движении полный момента импульса $\mathbf{M} = I_{\parallel} \boldsymbol{\Omega}_{\parallel} + I_{\perp} \boldsymbol{\Omega}_{\perp}$ и кинетическая энергия волчка $K = \mathbf{M} \boldsymbol{\Omega} / 2$ сохраняются, поэтому

$$\mathbf{M}^2 = I_{\parallel}^2 \boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^2 + I_{\perp}^2 \boldsymbol{\Omega}_{\perp}^2 = \text{const}, \quad (31.7)$$

$$2K = \mathbf{M}\boldsymbol{\Omega} = I_{\parallel}\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}^2 + I_{\perp}\boldsymbol{\Omega}_{\perp}^2 = \text{const} . \quad (31.8)$$

Соотношения (31.7) и (31.8) могут выполняться одновременно, только если модули векторов $\boldsymbol{\Omega}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{\perp}$ сохраняются. Это означает, что три вектора \mathbf{M} , $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{e}_{\parallel} не только всегда лежат в одной плоскости, но и сохраняют в этой плоскости неизменным взаимное расположение и свои длины. Отсюда следует, что в рассматриваемой инерциальной системе координат (в которой момент импульса неподвижен) вектора $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{e}_{\parallel} лежат в одной плоскости и вращаются по коническим поверхностям вокруг направления момента импульса (см. рис.?????) с одной и той же угловой скоростью. Такое движение волчка называется *регулярной прецессией*, а его угловая скорость — скорость прецессии $\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}}$ — может быть найдена из следующих соображений.

Формула (31.6) представляет собой разложение (по правилу параллелограмма) вектора угловой скорости волчка по двум направлениям: вдоль вращающейся оси симметрии и вдоль неподвижного момента импульса. Первое слагаемое, направленное вдоль оси симметрии, не влияет на движение этой оси. Поэтому именно второе слагаемое \mathbf{M}/I_{\perp} “заведует” движением оси симметрии волчка, то есть

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}} = \frac{\mathbf{M}}{I_{\perp}} . \quad (31.9)$$

Первое же слагаемое определяет вращение волчка вокруг вращающейся оси симметрии, называемое *собственным вращением* волчка:

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{соб. вращ.}} = \left(\frac{M_{\parallel}}{I_{\parallel}} - \frac{M_{\parallel}}{I_{\perp}} \right) \mathbf{e}_{\parallel} . \quad (31.10)$$

В заключение этого раздела рассмотрим движение симметрического волчка, который в инерциальной системе координат имеет закрепленную неподвижную точку O , расположенную на оси симметрии волчка. Пусть \mathbf{l} — вектор, проведенный из точки O в центр инерции волчка вдоль оси симметрии. Если на волчок действуют только силы, приложенные в неподвижной точке O , то в инерциальной системе координат $X'Y'Z'$ с началом отсчета в точке O момент этих сил равняется нулю и потому момент импульса волчка сохраняется. Легко видеть, что в этом случае уравнения движения свободного волчка сохраняют свой вид при замене

$$I_{\perp} \rightarrow I'_{\perp} = I_{\perp} + ml^2 . \quad (31.11)$$

В частности, ось симметрии волчка и вектор \mathbf{l} вращаются с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{пр}} = \frac{\mathbf{M}}{I'_{\perp}} \quad (31.12)$$

вокруг постоянного вектора момента импульса \mathbf{M} .

Быстрый волчок в поле тяжести

Теперь рассмотрим движение описанного выше волчка в условиях, когда на него помимо силы, приложенной в неподвижной точке O , действует еще и сила тяжести $m\mathbf{g}$,

причем для определенности будем считать, что неподвижная точка расположена ниже центра инерции волчка. Мы рассмотрим здесь только случай “быстрого волчка”, когда его кинетическая энергия велика:

$$K \sim \frac{M^2}{I_{\parallel}} \gg mgl. \quad (31.13)$$

В этих условиях в первом приближении можно пренебречь влиянием силы тяжести, и тогда мы приходим к уже рассмотренной выше задаче с постоянным моментом импульса и прецессирующей вокруг него с угловой скоростью (31.12) осью симметрии.

В следующем приближении учтем влияние силы тяжести, при этом уравнение для момента импульса волчка (31.3) примет вид

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{l}, m\mathbf{g}]. \quad (31.14)$$

Приближенное решение этого уравнения можно провести, разделяя быстрые и медленные движения векторов \mathbf{M} и \mathbf{l} . Именно, представим эти вектора в виде $\mathbf{M} = \langle \mathbf{M} \rangle + \delta\mathbf{M}$ и $\mathbf{l} = \langle \mathbf{l} \rangle + \delta\mathbf{l}$, где символ $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по быстрому вращению с угловой скоростью (31.12), в частности

$$\langle \mathbf{l} \rangle = \frac{\mathbf{M}}{M} l \cos \alpha_M, \quad (31.15)$$

где α_M — угол между вектором \mathbf{M} и осью симметрии волчка. Для медленно изменяющихся усредненных величин из уравнения (31.14), находим

$$\frac{d\langle \mathbf{M} \rangle}{dt} = [\langle \mathbf{l} \rangle, m\mathbf{g}] = [\Omega_g, \langle \mathbf{M} \rangle], \quad \Omega_g = -\frac{ml \cos \alpha_M}{M} \mathbf{g}. \quad (31.16)$$

Отсюда видно, что вектор момента импульса вращается с угловой скоростью Ω_g вокруг вертикального направления. В силу неравенства (31.13) отношение скоростей Ω_g и $\Omega_{\text{пр}}$ (31.12), как мы и предполагали, оказывается малым:

$$\frac{\Omega_g}{\Omega_{\text{пр}}} \sim \frac{mgl}{M^2/I_1} \sim \frac{mgl}{T} \ll 1. \quad (31.17)$$

Таким образом, ось симметрии “быстрого волчка” вращается с большой угловой скоростью (31.12) вокруг направления момента импульса, а сам момент импульса в среднем медленно вращается вокруг вертикального направления с угловой скоростью Ω_g .

§32. Элементы статики

Статика изучает равновесие тел. Основные уравнения статики можно получить из общих уравнений движения твердого тела (27.1)–(27.2),

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{K},$$

при учете того, что в статическом случае полный импульс тела \mathbf{P} и полный момент импульса \mathbf{M} равны нулю. Это приводит к уравнениям статики:

$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{K} = 0, \quad (32.1)$$

то есть статистическое равновесие требует равенства нулю суммы внешних сил и суммы моментов внешних сил, действующих на твердое тело.